Complementi di Matematica
Dodicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

29 ottobre 2009

$\cdot \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ dove P, Q polinomi

$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}$

e suppongo che l'integrale esista:

$\boxed{\alpha + n < m - 1}$ INTEGR. A ∞

$\boxed{Q(x) \neq 0 \ \forall\ x > 0}$ INTEGR. IN $x \in \mathbb{R}^+$

dove $n =$ grado (P), $m =$ grado (Q)

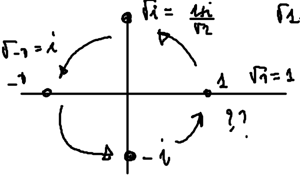
$\boxed{P(0) \neq 0\ ,\ \alpha > -1}$ INTEGR. IN 0

PROBLEMA non esiste una $f(z)$ olomorfa, definita su tutto $\mathbb{C}$ / $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, che estenda $x^{\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)}$, a causa di x^{α}

NON È CHIARO COSA SIA z^{α} (eccetto che per $\alpha \in \mathbb{Z}$)

IN EFFETTI VORREI SCRIVERE $z^{\alpha} = e^{\alpha \ln(z)}$ — però $z \mapsto \ln(z)$ non è definibile su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

PER ES. $z^{1/2} = \sqrt{z}$ non si può definire su tutto $\mathbb{C}$



$i = e^{i\pi/2} \Rightarrow \sqrt{i} = e^{i\pi/4}$

$-1 = e^{i\pi} \Rightarrow \sqrt{-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$-i = e^{\frac{3}{2}\pi} \Rightarrow \sqrt{-i} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{1} = \sqrt{e^{2\pi i}} = e^{\pi i} = -1$??

LA $\sqrt{z}$ così costruita ha un "salto" sui punti di $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$

IN EFFETTI "$\sqrt{z} = \{z_1, z_2\}$" — se formalizzassi questa idea (funzione multivoca) potrei considerare $\sqrt{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Quello che non riesco a fare è SELEZIONARE UNA "DETERMINAZIONE" DI $\sqrt{z}$ che sia continua su $\mathbb{C}$.

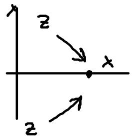
In generale se $z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$ ha infiniti valori — se $\alpha = \frac{n}{m}$, dopo "m giri" la funzione si ripete: $z^{1/m} = \sqrt[m]{z^n}$ HA "SOLO" m valori. Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ z^α HA INFINITE DETERMINAZIONI (nessuna delle quali continua su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

· POSSO PERÒ CONSIDERARE "LA DETERMINAZIONE PRINCIPALE" DEFINITA SU $\underline{\underline{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{R}^-}}} = \{z\in\mathbb{C},\ z\neq x,\ x\in\mathbb{R},\ x\le 0\}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)} \qquad \text{dove} \quad \ln(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \quad \mathrm{Arg}(z) \in \,]-\pi,\pi[$$

Oppure posso decidere che $z^\alpha : \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{R}^+} \to \mathbb{C}$ ponendo

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln(z)} \qquad \text{con} \quad \ln(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \quad \mathrm{Arg}(z) \in \,]0,2\pi[$$



Con questa seconda determinazione:

$z^\alpha \to x^\alpha$ se $z \to x > 0$, "DA SOPRA"

$z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho \to x$, $\theta \to 0$

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|\rho| + i\theta)} = \alpha \ln|\rho|\, e^{\alpha i \theta} \to x^\alpha \cdot 1$$

$z^\alpha \to x^\alpha \cdot e^{2\alpha\pi i}$ se $z \to x > 0$, DA SOTTO

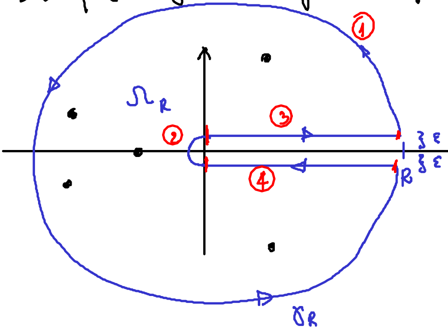
$z = \rho e^{i\theta}$ $\quad \rho \to x$, $\theta \to 2\pi$

$$z^\alpha \to x^\alpha \cdot e^{2\alpha\pi i}$$

• Torniamo al problema di partenza: considero $f(z) = z^{\alpha} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

con la determinazione di z^{α} detta sopra.

Dunque f è definita per $z \neq$ reale ≥ 0, e $z \neq$ RADICI DI Q



Considero il cammino γ_R disegnato a lato, che rinchiude una zona in cui f è olomorfa. Se R è grande tale zona contiene tutti gli zeri di Q

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Q(w)=0} \mathrm{Res}(f, w)$$

QUATTRO PEZZI

① = circonferenza esterna. Il contributo $\to 0$ se $R \to +\infty$

. Infatti $|f(z)| \leq \dfrac{cost}{|z|^{\beta}}$ dove $\beta = n + \alpha - m > 1$

$$\Rightarrow \left| \int_{circ f(R)} f(z)\,dz \right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lunghezza} \\ \text{circonf.}}}{2\pi R} \cdot \frac{cost}{R^{\beta}} = \frac{cost}{R^{\overset{>0}{\beta-1}}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

② semicirconferenza piccola: Il contributo tende a zero a causa di $\alpha > -1$. Infatti

$$\left| \int_{semicirc.(\varepsilon)} f(z)\,dz \right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lunghezza} \\ \text{semicirc.}}}{\pi\varepsilon} \cdot cost \cdot |z|^{\alpha} \leq cost\, \varepsilon^{\overbrace{1+\alpha}^{>0 \text{ se } \alpha>-1}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

③ semiretta superiore $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ (determinazione da sopra)

④ semiretta inferiore $\longrightarrow$ $\displaystyle -\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{2\pi\alpha i} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ (det. da sotto)

· Ne ricavo:

$$2\pi i \sum_{Q(w)=0} \operatorname{Res}(f, w) = \left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}$ $\quad (\Leftrightarrow 1 - e^{2\pi\alpha i} \neq 0)$

quindi se

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\alpha\pi i}} \sum_{Q(w)=0} \operatorname{Res}(f, w)}$$

attenzione alla determinazione di x^α

Per esempio se $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ $\quad \left(e^{2\cdot(\pm\frac{1}{2})\pi i} = e^{\pm\pi i} = -1 \right)$

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \pi i \sum_{Q(w)=0} \operatorname{Res}(f(z), w)$$

· Esempio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{(1+x)^2\sqrt{x}}\,dx$$

(tutte le ipotesi sono verificate, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n = 1$, $m = 2$)

POLI $= -1$ con molteplicità 2

INTEGRALE $= \pi i \operatorname{Res}(f_1, -1) = \pi i\, h'(-1)$ (h)

$$f(z) = z^{-1/2}\frac{z+2}{(1+z)^2} \qquad h(z) = z^{-\frac{1}{2}}(z+2)$$

$$h'(z) = -\frac{1}{2} z^{-3/2}(z+2) + z^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z}(z+2)+1\right)$$

$$z=-1 = e^{\pi i}, \quad z^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2}\ln(e^{\pi i})} = e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$$

$$\longrightarrow \quad h'(-1) = -i\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{-1}(-1+2)+1\right) = -i\left(\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{3}{2}i$$

$$\longrightarrow \quad \text{INTEGRALE} = \pi i\left(-\frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Esempio $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}\,dx \qquad \alpha = \frac{1}{3}$

POLI $= \pm i$ SEMPLICI (NON VARRÀ LA REGOLA $\mathrm{Res}(\bar{z}_0) = \overline{\mathrm{Res}(z_0)}$)

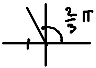
$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, i) = \left.\frac{z^{1/3}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{\frac{\pi}{6} i}}{2i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{2i} \qquad \left(i = e^{\frac{\pi}{2} i}\right)$$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \left.\frac{z^{1/3}}{2z}\right|_{z=-i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2} i}}{-2i} = -\frac{1}{2} \qquad \left(-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(-i) = -\frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$\text{INTEGRALE} = \frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{2}{3}\pi i}} \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) = -\frac{2\pi i}{1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) =$$



$$= -\pi i \, \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = -\pi i \, \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{-\pi i}{3}\left(\cancel{\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{3\sqrt{3}}{4}i-\cancel{\frac{3}{4}}\right)=\frac{-\pi i}{3}\;\frac{1+3}{4}\;\sqrt{3}\,i=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\pi$$

Esempio (Compitino anno passato)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2+x^3}\,dx \qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

POLI ??

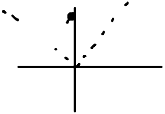
$$1+x+x^2+x^3=\frac{x^4-1}{x-1}\to$$ RADICI QUARTE DI 1 ECCETTO $x=1$

$-1,\ i,\ -i$, tutte radici semplici.

$$\mathrm{Res}(i)=\frac{z^{1/2}}{1+2z+3z^2}\Big|_{z=i}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{1+2i-3}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{-2+2i}$$

$$\mathrm{Res}(-i)=\quad " \quad " \quad\Big|_{z=-i}=\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{1-2i-3}=\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{-2-2i}$$

$$\cdot\ \mathrm{Res}(-1) = \text{''} \quad \text{''} \Big|_{z=-1} = \frac{i}{1-2+3} = \frac{i}{2}$$



$$\text{INTEGRALE} = \pi i \left(\frac{i}{2} + \frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{-2+2i} + \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{-2-2i} \right) =$$

$$\pi i \left(\frac{i}{2} + e^{\frac{\pi}{2} i} \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4} i}}{-2+2i} + \frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{-2-2i} \right) \right) =$$

$$\pi i \left(\frac{i}{2} + i\, \cancel{2}\, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4} i}}{\cancel{2}(-1+i)} \right) \right) = -\pi \left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)(-1-i)}{2} \right) \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{2} \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \pi$$

Esempio (compitino anno scorso)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+5)^2}\,dx \rightsquigarrow (\text{V.P.})\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+5)^2}}_{f(x)}\,dx = \text{INT.2}$$

POLI : $z=0$ semplice (radici $\to$ $1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$)

$z = 1 \pm 2i$ doppie

$$\text{INT.2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+2i) + \pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{Res}(f, 1+2i) = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{z(z-1+2i)^2}\Bigg|_{z=1+2i} = \quad (\text{polo doppio})$$

$$\frac{i e^{iz}\cdot z\cdot(z-1+2i)^2 - e^{iz}\left[(z-1+2i)^2 + z\cdot 2\cdot(z-1+2i)\right]}{z^2(z-1+2i)^4}\Bigg|_{z=1+2i}$$

$$= e^{(1+2i)i}\,\frac{i(1+2i)(4i)^2-[(4i)^2+2(1+2i)(4i)]}{(1+2i)^2(4i)^4} =$$

$$\frac{e^{-2+i}}{4^4(-3+4i)}\left((-2+i)(-16)-[-16+8(-2+i)]\right) =$$

$$\frac{e^{-2+i}}{16^2(9+16)}(-3-4i)\left(32-16i-[-16-16+8i]\right) =$$

$$\frac{e^{-2+i}}{256\cdot 25}(-3-4i)(64-24i) = \frac{e^{-2+i}}{32\cdot 25}(-3-4i)(8-3i) =$$

$$\frac{e^{-2+i}}{32\cdot 25}(-24+9i-32i-12) = \boxed{\frac{e^{-2+i}}{32\cdot 25}(-36-23i)}$$

$$\text{INT.2} = 2\pi i\left(\frac{e^{-2+i}}{32\cdot 25}(-36-23i)\right)+\frac{\pi i}{5} =$$

$$\text{INT. } 1 = \operatorname{Im}(\text{INT. } 2) =$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{\pi e^{-2}}{16 \cdot 5} \operatorname{Re}\left(e^{i}(-36 - 23i) \right) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{400} e^{-2} \left(-36\cos(1) + 23\sin(1) \right)$$

FINE