Complementi di Matematica
Undicesima lezione

prof. Claudio Saccon

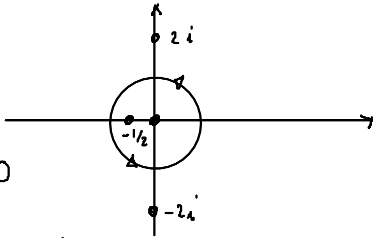
Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

27 ottobre 2009

Esempio

$$\int_{\partial D(0,1)} \underbrace{\frac{z^4+1}{(z^2+4)(2z+1)z}}_{f(z)}\,dz = (*)$$

$f(z)$ ha quattro poli $\pm 2i$, $-\frac{1}{2}$, 0, tutti semplici



I° MODO

$$(*) = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}\left(f,\tfrac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \left.\frac{z^4+1}{(z^2+4)(2z+1)}\right|_{z=0} = \frac{1}{4}$$

(ATTENZIONE AL 2 !!!)

$$\mathrm{Res}\left(f,-\tfrac{1}{2}\right) = \left.\frac{z^4+1}{(z^2+4)\,2\cdot z}\right|_{z=-1/2} = \frac{\frac{17}{16}}{\left(\frac{1}{4}+4\right)(-1)} = -\frac{\frac{17}{16}}{\frac{17}{4}} = -\frac{1}{4}$$

· II° MODO (usando il secondo teorema dei residui)

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z) = -\int_{\partial(\mathbb{C}\setminus D(0,1))} f(z)\,dz = -2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,2i) + \operatorname{Res}(f,-2i) + \operatorname{Res}(f,\infty)\right)$$

$$\operatorname{Res}(f,2i) = \left.\frac{z^4+1}{(z+2i)(2z+i)z}\right|_{z=2i} = \frac{17}{4i\,(4i+1)\,2i} = \frac{17}{-8(1+4i)}$$

$$= -\frac{17}{8}\frac{(1-4i)}{1+16} = -\frac{1-4i}{8}$$

$$\operatorname{Res}(f,-2i) = \overline{\operatorname{Res}(f,2i)} = -\frac{1+4i}{8}$$

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \operatorname{Res}(g,0) \quad \text{dove} \quad g(z) = -\frac{\frac{1}{z^4}+1}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\left(\frac{2}{z}+1\right)\frac{1}{z}\cdot z^2} =$$

$$= -\frac{\frac{1+z^4}{z^4}}{\frac{z^2+1}{z^2}\,\frac{2+z}{z}\,z} = -\frac{\frac{1+z^4}{z^4}}{\frac{(z^2+1)(2+z)}{z^2}} = -\frac{1+z^4}{z^2(z^2+1)(2+z)} = g(z)$$

Noto che 0 è polo di ordine 2.

$$\mathrm{Res}(g,0) = -\frac{d}{dz}\frac{1+z^4}{(z^2+1)(2+z)}\Bigg|_{z=0} =$$

$$-\frac{4z^3(z^2+1)(2+z) - (1+z^4)\left[2z(2+z)+(z^2+1)\right]}{(z^2+1)^2(2+z)^2}\Bigg|_{z=0} =$$

$$-\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$$

Dunque $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} f(z)\,dz - 2\pi i\left(-\frac{1-4i}{8} - \frac{1+4i}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0$

TORNA

· Esempio

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = (*) \quad \left(\text{devo mettere v.p. perché l'integrando} \simeq \frac{1}{x} \text{ a } \pm\infty \right)$$

$$\left(\text{cioè } \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} \right).$$

Uso le formule coi residui

SINGOLARITÀ: $x^2+2x+2=0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

entrambe di ordine 2. Pongo $f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+2z+2)^2}$

$$(*) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) + \pi i \operatorname{Res}(f, \infty) \qquad \text{(FORMULA NOTA)}$$

$$\operatorname{Res}(f, -1+i) = \frac{d}{dz} \frac{z^3}{(z+1+i)^2} \Bigg|_{z=-1+i} =$$

$$\left.\frac{3z^2(z+1+i)^2 - z^3\cdot 2(z+1+i)}{(z+1+i)^4}\right|_{z=-1+i} =$$

$$\frac{3(-1+i)^2(2i)^2 - (-1+i)^3\cdot 2(2i)}{(2i)^4} = \frac{3\cdot(-2i)(-4) - 2(i+1)\cdot 4i}{16} =$$

$$(-1+i)^2 = 1-2i-1$$

$$(-1+i)^3 = (-1+i)(-2i) = 2i+2$$

$$= \frac{i}{16}(24-8-8i) =$$

$$= \frac{i}{16}(16-8i) = \frac{i}{2}(2-i)$$

$$= \frac{1+2i}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -1 \qquad f(z) = \frac{z^3}{z^4+\dots}$$

$$(*) = 2\pi i\,\frac{1+2i}{2} + \pi i(-1) = \pi i - 2\pi - \pi i = -2\pi$$

(TORNA CHE VENGA REALE)

• Proviamo a calcolare l'ultimo integrale tramite la riduzione in fratti semplici (metodo più lungo, che però ci permette di calcolare la primitiva).

$$\frac{z^3}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{A}{z+1+i} + \frac{B}{(z+1+i)^2} + \frac{\bar{A}}{z+1-i} + \frac{\bar{B}}{(z+1-i)^2}$$

$A =$ coeff -1 esimo dello sviluppo di f in $z = -1-i$ (residuo)

$B =$ " -2 esimo " " " " "

$h(z) =$ parte analitica in $-1-i$ $= \dfrac{z^3}{(z+1-i)^2}$

$A = h'(-1-i) \qquad B = h(-1-i)$

$$B = \frac{(-1-i)^3}{(-2i)^2} = \frac{2-2i}{-4} = -\frac{1-i}{2}$$

$$(-1-i)^3 = -1+3(-i)+3(-1)(-1)-i = -1-3i+3-i = 2-2i$$

$$h'(-1-i) = \left.\frac{3z^2(z+1-i) - z^3\cdot 2\cdot(z+1-i)}{(z+1-i)^4}\right|_{z=-1-i} =$$

$$\frac{3(-1-i)^2(-2i) - (-1-i)^3\cdot 2\cdot(-2i)}{(-2i)^4} = \frac{6i(-2i) - (2-2i)(-4i)}{16} =$$

$$\frac{12+8i+8}{16} = \frac{20+8i}{16} = \frac{5+2i}{4}$$

$$\frac{z^3}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{5+2i}{4}\,\frac{1}{z+1+i} + \frac{5-2i}{4}\,\frac{1}{z+1-i} +$$

$$- \frac{1-i}{2}\,\frac{1}{(z+1+i)^2} - \frac{1+i}{2}\,\frac{1}{(z+1+i)^2}$$

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{5+2i}{4}\,\frac{1}{x+1+i}\right) - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}\,\frac{1}{(x+1+i)^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{(5+2i)(x+1-i)}{(x+1)^2+1} - \mathrm{Re}\,\frac{(1-i)(x+1-i)^2}{[(x+1)^2+1]^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{5(x+1)\quad+2}{(x+1)^2+1} - \mathrm{Re}\,\frac{(1-i)[(x+1)^2-1-2i(x+1)]}{((x+1)^2+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{5x+7}{(x+1)^2+1} - \frac{(x+1)^2-1-2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2} =$$

$$\cdot\ \frac{1}{2}\,\frac{5x+7}{(x+1)^2+1} - \frac{x^2+2x+1-1-2x-2}{\left((x^2+1)^2+1\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{5x+7}{(x+1)^2+1} - \frac{x^2-2}{\left((x^2+1)^2+1\right)^2} \qquad ??$$

FERMIAMOCI QUI — L'integrale (fatto così) è troppo complicato

· PIÙ IN GENERALE POSSIAMO AMMETTERE ANCHE POLI SULL'ASSE x, A PATTO CHE SIANO POLI SEMPLICI:

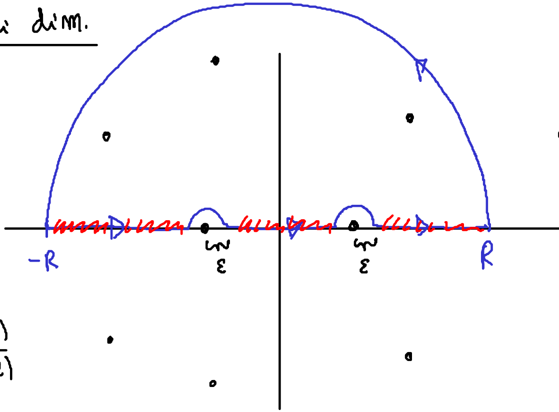
P, Q polinomi; grado $P \leq$ grad $Q - 1$ (∞ polo semplice)

Q può radici reali, ma devono essere semplici. Allora

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \operatorname{Im} w > 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, w\right) + \pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \operatorname{Im} w = 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, w\right)$$

$$+ \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \infty\right)$$

Idea di dim.



$$\int_{\text{Parte rosso}} \to \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{\text{circ. piccolo}} \to -\pi i \sum{}' \text{Res}(x_k)$$

$$\int_{\text{circ. grande}} \to -\pi i \,\text{Res}(\infty)$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

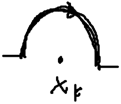
$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \text{Im } w>0}} \text{Res}(f,w)$$

Se mando $R \to \infty \Rightarrow \int_{\text{semicirconf.}} f(z)\,dz \longrightarrow -\pi i \,\text{Res}(f,\infty)$

(come l'altra volta)

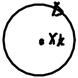
Se mando $\varepsilon \to 0$.

$$\int_{\substack{\text{semicirco} \\ \text{intorno a } x_k \\ \text{di raggio } \varepsilon}} f(z)\,dz \longrightarrow -\pi i \,\mathrm{Res}(f, x_k)$$



$\longrightarrow -\mathrm{Res}.\,\pi i$ (quando $\varepsilon \to 0$)

$$\int_{[-R,R]\setminus \text{intorni di raggio } \varepsilon} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{R \to \infty} (\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$



$\longrightarrow -\mathrm{Residuo}\ 2\pi i$

CONTA IL FATTO CHE OGNI x_k È POLO SEMPLICE

Esempio $(V.P.)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)x}\,dx$ (ci sono poli reali ($x=0$) e polo a ∞)

Poli: $0, \; -1 \pm i$ tutti semplici. Dunque

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)x}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(-1+i) + \pi i \operatorname{Res}(0) + \pi i \operatorname{Res}(\infty)$$

$$\operatorname{Res}(-1+i) = \left.\frac{z^2+1}{(z+1+i)z}\right|_{z=-1+i} = \frac{(-1+i)^2+1}{(2i)(-1+i)} =$$

$$\frac{[(-2i)+1](-1-i)}{2i(1+1)} = \frac{1}{4i}(-1-i+2i-2) = \frac{-3+i}{4i}$$

$\cdot\ \mathrm{Res}(0) = \left.\dfrac{z^2+1}{z^2+2z+2}\right|_{z=0} = \dfrac{1}{2}$

$\cdot\ \mathrm{Res}(\infty) = -1$

$$(\mathrm{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \text{---}\ dx = \cancel{2}\pi \cancel{i}\left(\frac{-3+i}{\cancel{4}\cancel{i}_{\,2}}\right) + \pi i \frac{1}{2} - \pi i =$$

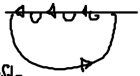
$$-\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}i - \pi i = -\frac{3}{2}\pi$$

· Notiamo che l'ultima formula ammette anche la versione coi poli che "stanno nel semipiano inferiore"

$$(VP)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -2\pi i\sum_{\substack{Q(w)=0\\ Im(w)<0}} Res(f,w) - \pi i \sum_{\substack{Q(w)=0\\ Im(w)=0}} Res(f,w) - \pi i\, Res(f,\infty)$$

(sempre a patto che tutti i poli reali e l'∞ siano semplici)

C'è un cambio di segno dovuto al fatto che:



la curva su cui si deve ragionare gira nel senso opposto

Ulteriore generalizzazione

P, Q polinomi. grado $(P) <$ grado $(Q) - 1$.

Se $Q(x_0) = 0$ x_0 è radice semplice. $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

Allora

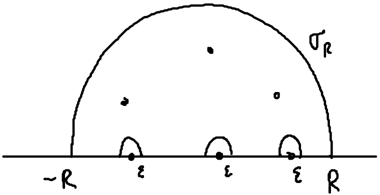
$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}\, dx =$$

$$2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \mathrm{Im}(w)>0}} \mathrm{Res}(f, w) + \pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \mathrm{Im}(w)=0}} \mathrm{Res}(f, w) \qquad \text{se } a > 0$$

$$-2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \mathrm{Im}(w)<0}} \mathrm{Res}(f, w) - \pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \mathrm{Im}(w)=0}} \mathrm{Res}(f, w) \qquad \text{se } a < 0$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$$

IDEA DI DIM. Si usa la stessa curva del caso precedente $\boxed{\text{se } a>0}$



e si manda $R \to \infty$
$\varepsilon \to 0$

La differenza è nel fatto che

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{se } R \to \infty \qquad \text{dove } \sigma_R(t) = R e^{it} \quad 0 \le t \le \pi$$

(la mezza circonferenza di raggio R). In effetti:

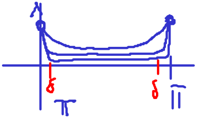
$$\left| \int_{\sigma_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} Re^{it} e^{iaRe^{it}}\,dt \right| \le$$

$$\int_0^\pi \frac{cost}{R}\, R \left| e^{iaRe^{it}} \right| dt = \boxed{cost \int_0^\pi e^{-aR\sin(t)}\, dt}$$

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{cost}{|z|} \qquad \left| e^{z_0} \right| = e^{\operatorname{Re} z_0}$$

mi chiedo se $\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{-Ra\sin(t)}\, dt = 0$.

La questione è delicata perché l'integrando tende a zero puntualmente su $]0,\pi[$, ma non unif.



Ciò nonostante l'integrale tende a zero

In effetti: $\int_0^\pi e^{-Ra\sin(t)} = \int_0^\delta + \int_\delta^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^\pi$

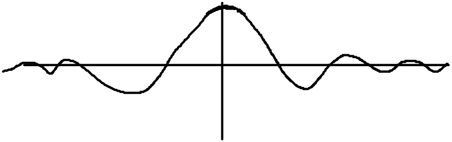
Il primo e l'ultimo sono $\le \delta$, il secondo pezzo $\to 0$ se $R \to \infty$ $(\dots)$

· Alla fine le cose funzionano (NOTA CHE SERVE $a>0$)

e dunque si ricava la formula.

Se $a<0$ si usa la curva che "gira di sotto"

Esempio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$



(esempio di funzione integrabile secondo Riemann, ma non ass. int.)

Passiamo a

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$ (la parte reale necessita di (v.p.))

($a=1$) uso la formula

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i$$

Dato che $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ ho trovato

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = 0 \quad , \quad (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi$$

$\Uparrow$ ovvio che sia zero dato che l'integrando è dispari

$\Uparrow$ qui posso togliere (v.p.)

· Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+2x+2}\, dx \,. \quad \text{Passo a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}, -1+i\right) =$$

(se c'era e^{-ix} dovevo prendere $-1-i$)

$$2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{2z+2}\right|_{z=-1+i} = \cancel{2}\pi\cancel{i}\, \frac{e^{(-1+i)i}}{\cancel{-2}+2\cancel{i}+\cancel{2}} = \pi e^{-1-i} =$$

$$\frac{\pi}{e}\left(\cos(1) - i\sin(1)\right) \implies$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\cos(1) \; ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{\pi}{e}\sin(1)$$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\,(1+x^2)^2}\,dx \,.$$

Posso a

$$(\text{v.p.}) \int \frac{e^{ix}}{x\,(1+x^2)^2}\,dx =$$

0 polo semplice reale

$\pm i$ poli doppi, non reali

$$2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i) + \pi i \,\mathrm{Res}(f, 0)$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z\,(1+z^2)^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1$$

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{d}{dz}\, \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} \Bigg|_{z=i} =$$

$$\frac{i e^{iz} z (z+i)^2 - e^{iz}\left[(z+i)^2 + z \cdot 2 \cdot (z+i)\right]}{z^2 (z+i)^4} \Bigg|_{z=i} =$$

$$\frac{i\, e^{-1}\, i\,(-4) - e^{-1}\left[-4 + i \cdot 2 \cdot 2i\right]}{-1 \cdot 16} =$$

$$\frac{4e^{-1} + 8e^{-1}}{-16} = -\frac{12}{16} e^{-1} = -\frac{3}{4} e^{-1} \Longrightarrow$$

$$(\mathrm{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i \frac{(-3)}{4} e^{-1} + \pi i \cdot 1 = \left(-\frac{3\pi}{2e} + \pi\right) i$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x\,(1+x^2)^2}\,dx = 0$$

(NOTA CHE L'INTEGRANDO È DISPARI)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)^2}\,dx = \pi\left(1-\frac{3}{2e}\right)$$