Complementi di Matematica
Decima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

26 ottobre 2009

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

- P, Q polinomi a coeff. reali
- $Q(x) \neq 0$ se $x \in \mathbb{R}$
- $\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\text{grado}}(P) \leq \text{grado}(Q)^{=m} - 2$

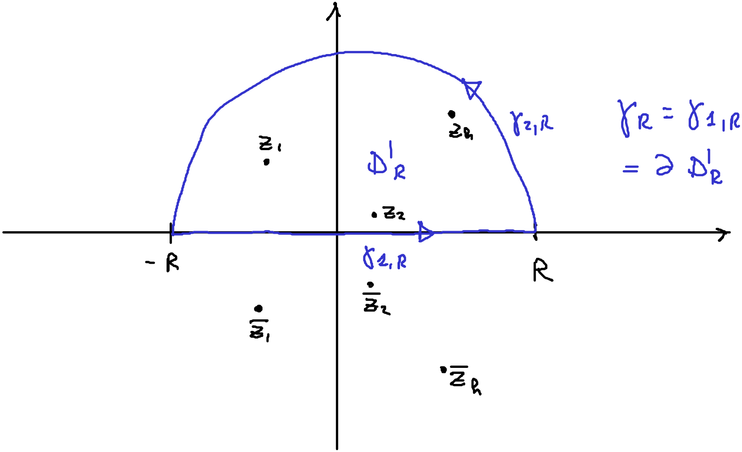
Ne segue che $\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$ è integrabile su $\mathbb{R}$, In particolare

$$|f(x)| \leq \frac{\text{cost}}{|x|^2}$$

Vorrei calcolare tale integrale. f è definita su $\mathbb{C} \setminus \{z_1 \ldots z_k\}$ dove $z_1, \overline{z_1} \ldots z_k, \overline{z_k}$ = radici di Q. $2k \leq m$ – ogni z_j ha molteplicità m_j e $2(m_1 + \cdots + m_k) = m$ = grado (Q).

Sottintendiamo che P non ha radici comuni con Q.

$\Rightarrow$ $z_1 \ldots z_k$ = poli di f con ordine $m_1 \ldots m_k$.



$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$
$= \partial D'_R$

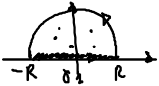
dato $R>0$ considero la curva chiusa γ_R disegnata sopra

γ_R DESCRIVE $\partial D'_R$ dove $D'_R = \{ z : |z| < R, \ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$,

Per R suff. grande tutte le radici z_j con $\mathrm{Im}\, z_j > 0$, sono in D'_R

Per il teorema dei residui :

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j)$$



$$\| $$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz = (1) + (2)$$

$$(1) = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \left(\text{se } R \to +\infty \implies (1) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \right)$$

$$(2) = \int_{0}^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\, R i e^{it}\,dt \qquad \left(\gamma_{2,R}(t) = R e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi \right)$$

$$|(2)| \le \pi \max_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot R \le \text{cost}\, \frac{1}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

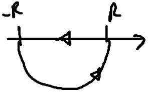
$$\left(\text{è facile vedere che } \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \le \frac{\text{cost}}{|z|^2} \right)$$

· Dunque se faccio tendere R a ∞

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) =$$

$$2\pi i \sum_{\substack{Q(w) \\ \mathrm{Im}(w)>0}} \mathrm{Res}(f, w)$$

<u>Nota</u> Si potrebbe anche "girare di sotto" e trovare



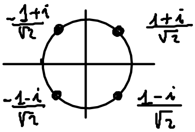
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \mathrm{Im}(w)<0}} \mathrm{Res}(f, w)$$

(in particolare deve essere $\displaystyle\sum_{Q(w)} \mathrm{Res}(f, w) = 0$)

· **Esempi**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

$Q(z) = 1+z^4$ radici $\xrightarrow{\text{(semplici)}}$



$P(z) = z^2$ Le ipotesi valgono

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right) = (*)$$

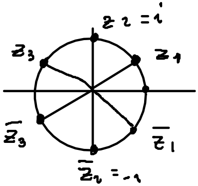
$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{P(w)}{Q'(w)} \quad \text{(se } w \text{ è una radice di } Q\text{)}$$

$$= \frac{w^2}{4w^3} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{4 w \bar{w}} = \frac{\bar{w}}{4}. \quad \text{Dunque}$$

$$(*) = 2\pi i \left(\frac{1}{4}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\,\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, i \left(\cancel{1} - i - \cancel{1} - i\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

· Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{1+x^6}\,dx = ?$$



$Q(z) = 1 + z^6 \to$ Radici seste di -1

che sono i poli di Q – tutti semplici

$P(z) = z^4+1$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) = \left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z=z_j} =$$

$$\left.\frac{z^4+1}{6z^5}\right|_{z=z_j} = \left.\frac{1}{6}\,\frac{(z^4+1)\,\bar{z}^5}{1}\right|_{z=z_j} = \left.\frac{1}{6}\left(\bar{z} + \bar{z}^5\right)\right|_{z=z_j}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{2\pi i}{6}\left(\bar{z}_1 + \bar{z}_1^{\,5} + \bar{i} + \bar{i}^{\,5} + \bar{z}_3 + \bar{z}_3^{\,5}\right) =$$

$$z^6 = -1$$
$$z^5 \cdot z = -1$$
$$z^5 = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar z}{1}$$

$$\frac{\pi i}{3}\left(\bar z_1 - z_1 - \cancel{i} + \cancel{i} + \bar z_3 - z_3\right) =$$

$$\frac{\pi i}{3}\left(-\frac{i}{2} - \frac{i}{2} - \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right) =$$

$$\frac{\pi i}{3}(-2i) = \frac{2}{3}\pi$$

Fisso il th. dei residui considero $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz$

dove Ω è un aperto limitato

C'è un analogo teorema che considera il caso

in cui Ω è illimitato, MA $\partial\Omega$ limitato

In questo caso BISOGNA CONSIDERARE "∞"

· Residuo all'infinito

Def. (1) Ω aperto si dice intorno di ∞ se $\exists\, R > 0$ tale che $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)} \subset \Omega$, cioè $C(0,R,\infty) \subset \Omega$

Se le cose stanno così $\partial\Omega \subset \overline{D(0,R)}$

(2) se Ω è intorno di ∞ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, diciamo residuo di f a ∞

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}(g, 0)$$

dove $g(z) = -\frac{1}{z^2} f(1/z)$, definita in $\Omega^* = \{w : \frac{1}{w} \in \Omega\}$

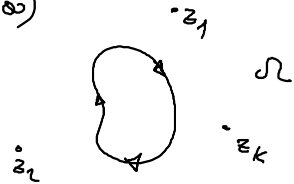
(Ω^* contiene $D(0, \frac{1}{R}) \setminus \{0\}$)

Teorema (II teorema dei residui)

Ω intorno di ∞, $f : \Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ olomorfa

Allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$



NO DIM.

Def. ∞ è polo di ordine k per f se 0 è polo di ordine k per g — $g(w) = -f(1/w)\,\frac{1}{w^2}$

Caso speciale $\quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad g(z) = -\frac{P(1/z)}{z^2\, Q(1/z)}$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$$

$$g(z) = -\frac{P(1/z)}{z^2 Q(1/z)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_m \neq 0 \\ a_n \neq 0 \end{array}}$$

$$g(z) = -\frac{\frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + a_0}{z^2\left(\frac{b_m}{z^m} + \frac{b_{m-1}}{z^{m-1}} + \cdots b_0\right)} =$$

$$-\frac{z^m}{z^{n+2}} \frac{a_n + a_{n-1} z + \cdots + a_0 z^n}{b_m + b_{m-1} z + \cdots + b_0 z^m} =$$

$$-z^{m-n-2} \underbrace{\frac{a_n + a_{n-1} z + \cdots}{b_m + b_{m-1} z + \cdots}}_{h(z)} = -z^{m-n-2} h(z)$$

dove: trovare il residuo di g in zero — in generale mi serve lo sviluppo di Taylor in zero di $h(z)$. Il caso più semplice è $m = n+1 \Rightarrow$

$$-\frac{1}{z} h(z) \Rightarrow \text{Residuo} = -h(0) = -\frac{a_n}{b_m}.$$

• Si vede anche che, se $m \geq n+2 \Rightarrow \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$

(in questo caso g viene olomorfa in zero $\rightarrow$ "f è olomorfa a ∞")

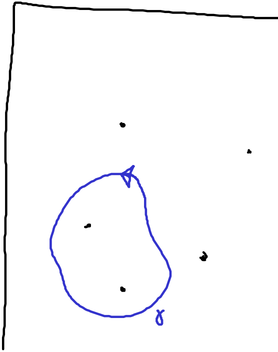
<u>Per esempio</u>

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = -1$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{1+z^2}, \infty\right) = -1$$

<u>Nota</u> Se $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1 .. z_k\} \Longrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z_j \text{ dentro}} \mathrm{Res}(f, z_j) = -\sum_{z_j \text{ fuori}} \mathrm{Res}(f, z_j) - \mathrm{Res}(f, \infty) \Longrightarrow \text{Tesi}$$

· Voglio generalizzare la formula di prima:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ Im(w)>0}} Res(f, w)$$

al caso in cui $n = $ grado P $=$ grado$(Q) - 1 = m-1$

Se es. vorrei avere a primo membro $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$??

In realtà l'ultimo integrale NON ESISTE (in senso "tradizionale")

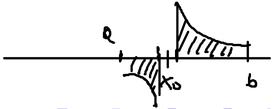
$\dfrac{x}{1+x^2} \simeq \dfrac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE.

Posso però dare una nozione PIÙ DEBOLE DI integrale.

<u>Def.</u> <u>1° caso</u>. $f : [a,b]\setminus\{x_0\} \to \mathbb{C}$ (dove $x_0 \in]a,b[$)

continua su $[a,b]\setminus\{x_0\}$.

Se esiste $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right) = \ell$



$\Rightarrow$ f è integrabile nel senso del valore principale in x_0

e $\quad \ell = (\text{V.P.}\, x_0) \int_a^b f(x)\,dx$

In questa definizione è essenziale il fatto che ho "scelto" un intorno SIMMETRICO di x_0.

Se per esempio facessi $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{x-2\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$

potrei trovare un valore diverso.

Nel caso dell'int. di Riemann ciò non accade perché si PRETENDE che esistano indipendentemente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx = \ell_1, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \ell_2$$

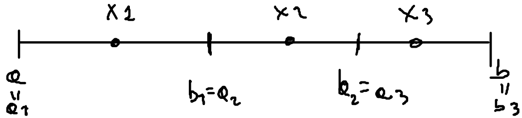
(DUNQUE Riemann $\Rightarrow$ valore principale, ma non $\Leftarrow$)

· Con questa def. $(v.p.0) \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = 0$

mentre $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ NON ESISTE

2 caso Più in generale se $f : [a,b] - \{x_1, \dots, x_k\}$

posso considerare $(v.p.) \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} (v.p.\,x_j) \int_{a_j}^{b_j} f(x)\,dx$



3 CASO Se $f : \mathbb{R} \setminus \{x_1 \dots x_k\}$

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \lim_{R \to +\infty} (v.p.) \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$

$$\boxed{(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = 0}$$

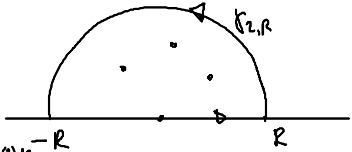
ES.

- Consideriamo allora il caso
- $P(x)$, $Q(x)$ polinomi
- $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $n =$ grado P $= m+1 =$ grado$(Q)+1$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, w\right) + \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \infty\right)$$

$$= -2\pi i \sum_{\substack{Q(w)=0 \\ \operatorname{Im} w<0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, w\right) - \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \infty\right)$$

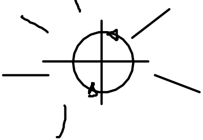
<u>DIM.</u> Consideriamo la situazione precedente



$$\sum_{w_j} \operatorname{Res}(f, w_j) = (V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz$$

· Se consideriamo $\displaystyle\int_{\partial D(0,R)} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty)$

(R grande) (II° Th. residui)



GROSSO MODO: " x R grande, $\displaystyle\int_{\text{MEZZA CIRC.}} \longrightarrow$ MEZZO RESIDUO A ∞

$\longleftrightarrow$ ∞ è polo semplice x $n = m+1$.

DUNQUE TROVO LA TESI