Complementi di Matematica
Nona lezione

prof. Claudio Saccon

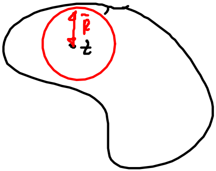
Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

22 ottobre 2009

· Ricordiamo che: Ω aperto in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$

$f : \Omega \setminus \{z_0\} \to$ olomorfa (z_0 è una singolarità isolata)

f si sviluppa in serie di Laurent rispetto a z_0:



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

su $C(z_0, 0, \bar{R}) = \{0 < |z - z_0| < \bar{R}\}$

dove $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D(z_0, R)} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ $\quad 0 < R < \bar{R}$

(in particolare $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D(z_0,R)} f(z)\, dz$) (z_0 sing. isolata)

<u>Def.</u> Se f è olomorfa vicino a z_0 chiamo <u>residuo</u> di f in z_0

$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} =$ coeff di Laurent (risp. a z_0) di indice -1

Teorema (I° t. dei residui) Se Ω è un aperto limitato (contorno dello ordine primo); $z_1, z_2, \dots, z_k \in \Omega$

$f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ olomorfa

Allora

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j)}$$

Il calcolo dei residui si presenta agevole nel caso dei POLI (singolarità isolate che hanno solo un numero finito di $a_k \neq 0$, $k<0$)

Supponiamo z_0 POLO DI ORDINE $\leq k$, cioè

$$f(z) = \sum_{m=-k}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m \iff (z-z_0)^k f(z) =: h(z) \text{ è olomorfa}$$

e

$$h(z) = \sum_{m=-k}^{+\infty} a_m (z-z_0)^{m+k} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m-k} (z-z_0)^m$$

Ma allora $a_{m-k} = \dfrac{h^{(m)}(z_0)}{m!}$ dato che a_{m-k} = m-esimo coeff. dello sviluppo di Taylor di h.

Dunque se z_0 è un polo di ordine $\leq k$

$$\boxed{a_m = \frac{h^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}}$$ per $m \geq -k$.

in particolare $$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}}$$ (se $k = 1$ $\mathrm{Res}(f, z_0) = h(z_0)$

Se k = ordine del polo la funzione $h(z) := (z-z_0)^k f(z)$ si chiama "parte analitica" di f in z_0

Esempi: Riduzione in fratti semplici di una funzione razionale

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z^4-1)^2\, z}$$

POLI: $\pm i$, ± 1 doppi
0 semplice

· So che posso trovare $A, B, \ldots, I$ in $\mathbb{C}$ tali che

$$f(z) = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{(z-i)^2} + \left[\frac{C}{z+i} + \frac{D}{(z+i)^2} + \frac{E}{z-1} + \frac{F}{(z-1)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{G}{z+1} + \frac{H}{(z+1)^2} + \frac{I}{z} \right]$$ + olomorfo vicino a i, non contribuisce ai termini a_k con $k<0$, rispetto a $z=i$

Posso dire che $A = a_{-1}$, $B = a_{-2}$ dello sviluppo in $z = i$

$C = a_{-1}$, $D = a_{-2}$ " " in $z = -i$

e così via. Ne segue che

$$A = h'(i) \qquad B = h(i) \qquad \text{dove } h(z) = f(z)(z-i)^2$$

$$= \frac{z^2+2}{z(z^2-1)^2(z+i)^2}$$ (parte analitica di f in $z=i$)

$$B = \frac{-1+2}{i(-1-1)^2(2i)^2} = \frac{1}{i(4)(-4)} = \frac{1}{8i} = \boxed{-\frac{i}{8} = B}$$

$$\cdot\ A = \frac{d}{dz} h(z)\Big|_{z=i} = \frac{2z\cdot z(z^2-1)^2(z+i)^2-(z^2+2)\left[(z^2-1)^2(z+i)^2+\cdots\right.}{z^2(z^2-1)^4(z+i)^4}$$

$$\left.\cdots+z\cdot 2(z^2-1)\cdot 2z\cdot(z+i)^2+z(z^2-1)^2\,2(z+i)\right]\Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{2i\cdot i\cdot(-1-1)^2(i+i)^2-(-1+2)\left[(-1-1)^2(i+i)^2+i\cdot 2\cdot(-1-1)\cdot 2i\,(i+i)^2+\right.}{-1\,(-1-1)^4(i+i)^4}$$

$$\left.+\,i(-1-1)^2\,2(i+i)\right] =$$

$$\frac{-2\cdot 4\cdot(-4)-1\left[4\cdot(-4)+i\cdot 2(-2)\cdot 2i\,(-4)+i(-4)\,2\cdot 2i\right]}{-1\cdot 16\cdot 16}$$

$$= \frac{32-\left[-\cancel{16}-32+\cancel{16}\right]}{-16^2} = -\frac{64}{16^2} = \frac{2^6}{2^8} = \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

residuo

$\cdot \quad C = \overline{A} \qquad D = \overline{B}$

perché $f(z)$ è una funzione razionale a coeff reali

$h_1(z)$ = parte analitica in $-i$; $h(z)$ = parte analitica in i

$$\Rightarrow \quad h_1(z) = \overline{h(\bar{z})}$$

infatti: $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z+i)^2(z-i)^2}$ $\left(\text{con } f_1 = \dfrac{P_1}{Q_1} \text{ a coeff reali} \right)$

$h_1(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z-i)^2}$ $\qquad h(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z+i)^2}$

$$\Rightarrow \quad \overline{h}(z) = \frac{f_1(\bar{z})}{(z-i)^2} = h_1(\bar{z}) \quad \text{cioè} \quad \overline{h}(\bar{z}) = h_1(z)$$

· Riassumendo se $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ P, Q pol. a coeff. reali

$\Rightarrow$ · i poli possono essere reali oppure comparire a coppie coniugate, aventi lo stesso ordine.

· se z_0 è un polo non reale

$h(z) =$ parte analitica in z_0

$h_1(z) =$ " " in $\bar{z}_0$

$\Rightarrow h_1(z) = \overline{h(\bar{z})}$

$\Rightarrow$ i coeff di Laurent a_n rispetto a $\bar{z}_0$ sono i coniugati dei coeff di L. rispetto a z_0

DUNQUE (tornando all'esercizio)

$\boxed{D = \dfrac{i}{8}}$ $\boxed{C = \dfrac{1}{4}}$; continuiamo ...

$$\cdot \quad f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2(z+1)^2(z^2+1)^2}$$

$$h(1) = \frac{3}{16}$$

$E/F \quad (z_0 = 1)$

$$h(z) = \frac{z^2+2}{z(z+1)^2(z^2+1)^2}$$

$E = h'(1)$, cioè

$$h'(1) = \frac{2z\, z(z+1)^2(z^2+1)^2 - (z^2+2)\left[(z+1)^2(z^2+1)^2 + z\cdot 2(z+1)(z^2+1)^2 + \right.}{z^2(z+1)^4(z^2+1)^4}$$

$$\left. \dots + z(z+1)^2 2(z^2+1) 2z \right]\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 4 - 3\left[4\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 1\right.}{16^2}$$

$$= \frac{32 - 3\left[16 + 16 + 64\right]}{2^8} = \frac{32(1-9)}{2^8} = -1$$

$$\cdot \quad F = h(1) = \frac{3}{16} .$$

G/H con $z_0 = -1$

$$h(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2(z^2+1)^2}$$

$$h'(-1) = \frac{2z \cdot z(z-1)^2(z^2+1)^2 - (z^2+2)\left[(z-1)^2(z^2+1)^2 + z \cdot 2 \cdot (z-1)(z^2+1)^2 + \ldots + z(z-1)^2\, 2(z^2+1)\, 2z\right]}{z^2(z-1)^4(z^2+1)^4} \Bigg|_{z=-1}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 - 3\left[4 \cdot 4 + (-1)\,2(-2)\,4 + (-1)\,4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2(-1)\right]}{16^2}$$

$$= \frac{32 - 3[16 + 16 + 64]}{16^2} = \boxed{-1 = G}$$

$$H = h(-1) = \boxed{-\frac{3}{16} = H}$$

· e per ultimo

$z_0 = 0$ $\quad h(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^4-1)^2}$ $\quad h(0) = \boxed{2 = I}$

dovrebbe essere meglio della soluzione del sistema 9×9 . . .

SE I POLI SONO SEMPLICI I CALCOLI SONO ABBASTANZA ELEMENTARI.

<u>Prop.</u> Supponiamo che $f(z) = \dfrac{g(z)}{Q(z)}$ con g olomorfa

dove Q è un polinomio, $Q(z_0) = 0$, z_0 radice semplice di Q. Allora $Q'(z_0) \neq 0$ e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(e z_0 è polo di ordine ≤ 1 per f)

Dim. Dire che z_0 è radice semplice di Q significa dire che $Q(z) = (z - z_0)\, Q_1(z)$ dove Q_1 polinomio tale che $Q_1(z_0) \neq 0$. Allora $h(z) = \dfrac{g(z)}{Q_1(z)}$ (h = parte analitica in z_0). Ne segue

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{Q_1(z_0)} = (*)$$

Notiamo ora che

$$\frac{d}{dz} Q(z) = \frac{d}{dz} Q_1(z)(z - z_0) = \left(\frac{d}{dz} Q_1(z)\right)\cdot(z - z_0) + Q_1(z)$$

se metto $z = z_0$

$$Q'(z_0) = \underbrace{Q_1'(z_0)(z_0 - z_0)}_{=0} + Q_1(z_0)$$

cioè $Q_1(z_0) = Q'(z_0)$ ($Q'(z_0)$ = resto della divisione di $Q_1/z - z_0$)

$$\Rightarrow (*) = \frac{g(z_0)}{Q'(z_0)} \quad !!!$$

· Altro esempio   Riduzione in fratti semplici di

$$\frac{z^2}{(z^4+1)(z^4+16)} = f(z)$$

poli: $\pm i$ ± 1 ± 2 $\pm 2i$ tutti semplici

$$f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+2i} + \frac{D}{z-2i} + \frac{E}{z+1} + \frac{F}{z-1} + \frac{G}{z+2} + \frac{H}{z-2}$$

usiamo la formula di prima: $g(z) = z^2$ $Q(z) = (z^4+1)(z^4+16)$

$$g_1(z) = \frac{z^2}{4z^3(z^4+16)+4z^3(z^4+1)} = \frac{1}{4z[2z^4+17]}$$

$$A = \mathrm{Res}(f, -i) = g_1(-i) = \frac{1}{4(-i)[2+17]} = \frac{i}{19 \cdot 4} = \frac{i}{76}$$

$$B = \bar{A} = -\frac{i}{76}$$

$$C = g(-2i) = \frac{1}{4(-2i)[32+17]} = \frac{i}{8 \cdot 49} \qquad D = \frac{-i}{8 \cdot 49}$$

$$E = \operatorname{Res}(f, -1) = g_1(-1) = \frac{1}{-4\,(19)} = -\frac{1}{76}$$

$$F = \operatorname{Res}(f, 1) = g(1) = \frac{1}{4 \cdot 19} = \frac{1}{76}$$

$$G = g_1(-2) = \frac{1}{-8 \cdot 49} \quad -$$

$$H = g_1(2) = \frac{1}{8 \cdot 49} \quad - \; -$$

Volendo si possono accoppiare i termini corrispondenti a radici coniugate, OTTENENDO UNA DECOMPOSIZIONE REALE

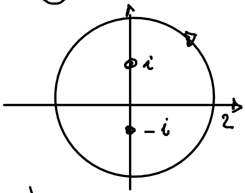
Per esempio $\dfrac{i}{76}\dfrac{1}{z+i} - \dfrac{i}{76}\dfrac{1}{z-i} =$

$$\frac{i}{76}\left(\frac{z-i-z-i}{z^2+1}\right) = \frac{i \cdot -2i}{76}\,\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{38}\,\frac{1}{z^2+1}$$

e lo stesso si può fare per gli altri pezzi

· Esempio

$$\int_{\partial D(0,2)} \underbrace{\frac{e^z}{z^2+1}}_{f(z)}\, dz = (*)$$



Per il teorema dei residui:

$$(*) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) \right)$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^i}{2i}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=-i} = \frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$\Rightarrow (*) = 2\pi i \left(\frac{e^i - e^{-i}}{2i} \right) = \pi \left(e^i - e^{-i} \right) = 2\pi i \sin(1)$$

(COMPITINO VENERDI' 13 NOVEMBRE - pomeriggio ~ 15.00 - DA CONFERMARE