# Complementi di Matematica
# Ottava lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

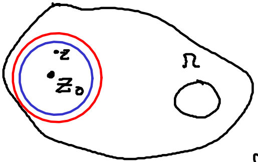
20 ottobre 2009

**Teorema** $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$, continua in $\overline{\Omega}$ e olomorfa in $\Omega$. Allora dato $z_0\in\Omega$, posto $\overline{R} := \mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)$

$\Longrightarrow$ se $z\in D(z_0,R)$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad$ dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad \rho<\overline{R}$$

cioè $R<\overline{R}$




**Dim.** Fisso $z_0$ in $\Omega$.

$R$ tale che $\overline{D(z_0,R)}\subset\Omega$.

Scrivo la formula di Cauchy nel disco $D(z_0,R)$. Dato $z\in D(z_0,R)$ si ha $2\pi i\, f(z) =$

$$\int_{\partial D(z_0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{\partial D(z_0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0+z_0-z}\,d\zeta =$$

$$= \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \, d\zeta =$$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

dato che la serie geom. converge unif. su $\overline{D(z_0,R)}$, posso scambiare integrale e serie e ottengo: (teorema di scambio tra integrale e serie per l'int. sulle curve)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right)}_{a_n \cdot 2\pi i} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dunque $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$ in $D(z_0, R)$

(dunque, per l'arbitrarietà di $R$, in $D(z_0, \bar{R})$).

Inoltre, se applico il t. di Cauchy a $\Omega_R = \Omega \setminus D(z_0, R)$ trovo che

$$0 = \int_{\partial \Omega_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta - \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

· **Conseguenze** • Se $f$ è olomorfa $\Rightarrow$ $f$ è $C^\infty$, anzi

$f$ è somma della sua serie di Taylor. Infatti

dato che $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

(per motivi già visti, nello studio delle serie di potenze)

Tale serie converge in $D(z_0, \overline{R})$ dove $\overline{R} = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

• Inoltre si ha:

$$f^{(n)}(z) = n!\, a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \forall z \in \Omega$$

(generalizzazione della formula di Cauchy, che corrisponde a $n=0$)

· Conseguenze

Teorema (di Liouville) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e se $f$ è limitata $\Rightarrow$ $f$ è costante.

Dim. Suppongo che $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, olomorfa e $|f(z)| \le M$.

Per quanto visto prima $(z_0 = 0, \Omega = \mathbb{C})$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{per qualunque } R > 0$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0,R)} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \right| d\zeta \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^n}$$

· Ma se $R \to +\infty$ $\quad \frac{M}{R^n} \to 0 \quad \forall n \geq 1$.

Ne segue che $a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow f(z) = a_0 = \text{cost}$.

Teorema (fond. dell'algebra) Se $P(z)$ è un polinomio con grado $k \geq 1$ $\Rightarrow \exists\, z_0$ tale che $P(z_0) = 0$

Dim Se $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) := \frac{1}{P(z)}$ sarebbe olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Dato che $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|z^k|} \frac{1}{|a_k + \text{infinitesimi}|}$

$(P(z) = a_k z^k + \text{termini di grado} < k) \Rightarrow |f(z)| \to 0$ se $|z| \to +\infty$

Questo implica che $f(z)$ è limitata su $\mathbb{C}$.

Per Liouville $f(z) = $ costante. ASSURDO

Def. Una funzione (reale o complessa) si dice "analitica" se è localmente somma della sua serie di Taylor.

Cioè $f : \Omega \to \mathbb{R} / \mathbb{C}$ $\quad (\Omega \subset \mathbb{R}/\mathbb{C})$, $\Omega$ aperto

$f \in C^{\infty}(\Omega)$ e per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $R > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{su } D(z_0, R)$$

Fatti: Nel caso reale ci sono funzioni $C^{\infty}$ che non sono analitiche (es.: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$)

Nel caso complesso $f$ derivabile $\Rightarrow$ $f$ analitica

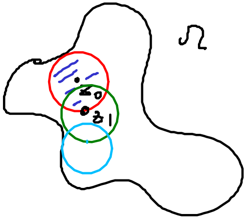
(in $\mathbb{C}$ "analitico" e "olomorfa" sono sinonimi)

**Fatto** Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa (o analitica)

$\Omega$ è connesso, $z_0 \in \Omega$ e se $f^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k$

$\Rightarrow$ $f$ è identicamente nulla!

**Idea della dim.**




Dato che tutte le derivate di $f$ sono nulle in $z_0$, essendo $f$ somma della sua serie di Taylor in $z_0$ nel disco $D(z_0, \bar{R})$ $\Rightarrow$ $f$ è nulla dentro tale disco.

Prendo un $z_1$ sul bordo di tale disco e riparto . . .

· Altre conseguenze Se $f$ è olomorfa in $\Omega$, $z_0 \in \Omega$

$f(z_0) = 0$. Allora vale una delle due:

· $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ ($\Omega$ connesso)

· $\exists \rho > 0$ tale che $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, \rho)$, $z \neq z_0$

($z_0$ è uno zero isolato)

Infatti se $f$ non è identicamente nulla c'è una derivata in $z_0$ che è diversa da zero, $\Rightarrow \exists n$ tale che $a_n \neq 0$.

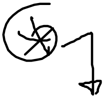
Suppongo che $n_0$ sia il primo intero $(\geq 1)$ con $a_n \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n - n_0} =$$

$$= (z-z_0)^{n_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0}(z-z_0)^n}_{h(z)} = (z-z_0)^{n_0}\, h(z)$$

$h$ è olomorfa in $D(z_0, \bar{R})$ e $h(z_0) = a_{n_0} \neq 0$ ($\bar{R} = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$). Per continuità esiste $\rho > 0$ tale che $h(z) \neq 0$ se $z \in D(z_0, \rho)$.

$$\Rightarrow f(z) \neq 0 \qquad \text{se } z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$$



Conseguenza (...) Se $f$ è olomorfa in $\Omega$ e non è identicamente nulla non può esistere una successione di zeri $\{z_n\}$ che converge a un punto $\bar{z} \in \Omega$ (può esistere se $z_n \to \bar{z} \in \partial\Omega$)

$$(*) \quad f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0)^{n_0+1} + \cdots$$

$$= (z-z_0)^{n_0} \underbrace{\left( a_{n_0} + a_{n_0+1}(z-z_0) + \cdots \right)}_{h(z)} \qquad (h(z_0) = a_{n_0})$$

---

Conseguenza Se $f$ e $g$ sono olomorfe. Se $\{z_n\}$ è una successione di punti che converge a un $\bar{z} \in \Omega$.

Se $f$ e $g$ coincidono sulla successione, allora $f \equiv g$.

( basta considerare la differenza $f-g$

- Analisi delle "singolarità"

**Premesse**: Serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad ??$$

**Def.** Dato $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pongo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n \Big|_{w=\frac{1}{z-z_0}}$$

· Tale serie ha un dominio del tipo

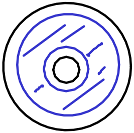
$$\{z \in \mathbb{C} : \quad \bar R_1 < |z-z_0| < \bar R_2 \} =: C(z_0, \bar R_1, \bar R_2)$$

$$\bar R_2 = \left( \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} ; \quad \bar R_1 = \max\lim_{n\to-\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{|z-z_0|} = |w| < \left( \max\lim_{n\to-\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \Rightarrow |z-z_0| > R_1$$

Si vede che la conv. è uniforme su ogni $\overline{C(z_0, R_1, R_2)}$

$= \{ z : \; R_1 \leq |z-z_0| \leq R_2 \}$



se $\bar R_1 < R_1 < R_2 < \bar R_2$.

Dentro tali corone valgono tutti "gli scambi possibili":

· per es. $f$ è infinitamente derivabile e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\,(z-z_0)^{n-k}$$

e si può anche scambiare integrali sulle curve e serie.

---

Vedremo ora che una funzione olomorfa in una corona è sviluppabile in serie di Laurent in tale corona. Si noti che la cosa è interessante anche per $R_1 = 0$. Per esempio

$$C(0,0,\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$C(0,0,1) = D(0,1) \setminus \{0\}$$

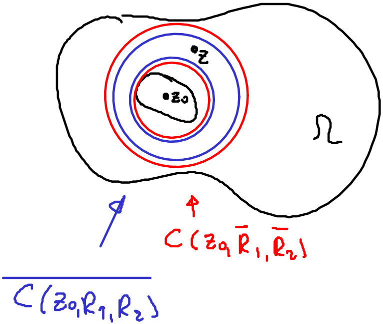
Supponiamo che $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e che

$C(z_0, \bar{R}_1, \bar{R}_2) \subset \Omega$

(non è detto che $z_0 \in \Omega$)

Prendiamo $\bar{R}_1 < R_1 < R_2 < \bar{R}_2$

$\Rightarrow \overline{C(z_0, R_1, R_2)} \in \Omega$.



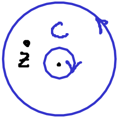

Sia $z \in C(z_0, R_1, R_2)$ (aperto) e scrivo

formula di Cauchy per $f$ in $C(z_0, R_1, R_2) = C$

$$2\pi i\, f(z) = \int_{\partial C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \int_{\partial C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta = \int_{\partial D(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta \; +$$

$$- \int_{\partial D(z_0,R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta = (1) + (2)$$




$$(1) = \int_{\partial D(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}\, d\zeta = \int_{\partial D(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta$$

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0| = R_2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(z_0,R_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^n$$

(Posso scambiare)

(è lo stesso calcolo del primo teorema di oggi)

$$② = -\int_{\partial D(z_0,R_1)} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)} \frac{1}{\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)-1} =$$

MODULO $< 1$

$$\int_{\partial D(z_0,R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n =$$

(posso scambiare)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(z_0,R_1)} f(\zeta)(\zeta-z_0)^n \, d\zeta \, \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

VOGLIO QUESTO COME INDICE

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \int_{\partial D(z_0,R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} \, d\zeta \, (z-z_0)^m$$

$$m = -(n+1)$$
$$\Updownarrow$$
$$n = -(m+1)$$

· Tutti gli integrali si possono scrivere su una circonferenza di raggio R con $R_1 < R < R_2$, dato che l'integrando $\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)$ è olomorfo nella corona e tutte le circonferenze sono omotope nella corona.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left( 1 + 2 \right) =$$

$$\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n$$

HO DIMOSTRATO IL SEGUENTE TEOREMA

Teorema Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e se $C(z_0, \overline{R}_1, \overline{R}_2) \subset \Omega$, allora:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n} \qquad z \in C(z_0, \overline{R}_1, \overline{R}_2)$$

(e la conv. è uniforme su ogni $\overline{C(z_0, R_1, R_2)}$ per ogni $R_1, R_2$ con $\overline{R}_1 < R_1 < R_2 < \overline{R}_2$ )

DOVE

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta} \quad (*) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

- AL POSTO DI $\partial D(z_0, R)$ potrei mettere una qualunque curva che "fa solo un giro, in senso antiorario" intorno a $z_0$.

- Notiamo che non posso più esprimere gli $a_n$ in termini dei valori di $f, f' \ldots$ in $z_0$ (tali valori non esistono)

- Il risultato sopra si applica per esempio se $z_0 \in \Omega$ e $f$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ ($z_0$ è una singolarità isolata) - in questo caso $R_1 = 0$.

Oss. Se $f = \sum a_n (z - z_0)^n$ allora gli $a_n$ DEVONO essere quelli indicati sopra - lo sviluppo di Laurent è UNICO.

Infatti supponiamo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Divido per $(z - z_0)^{k+1}$ e integro su $\partial D(z_0, R)$. (e scambio serie con integrale)

$$\int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\partial D(z_0,R)} (z - z_0)^{n-k-1} \, dz$$

· So che $\displaystyle\int_{\partial D(z_0,R)} (z-z_0)^{n-k-1} = 0$ tranne che per $n=k$

(perché l'integranda ammette primitiva $\dfrac{(z-z_0)^{n-k}}{n-k}$ )

mentre se $n=k$ trovo $2\pi i$. Dunque trovo

$$\int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = 2\pi i\, a_k$$ cioè la tesi #

---

Noto che:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,R)} f(z)\, dz$$

· Classificazione delle singolarità isolate

$\Omega$ aperto, $z_0 \in \Omega$, $f$ olomorfo su $\Omega \setminus \{z_0\}$

Per il teorema precedente $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

Si possono avere tre casi

I° $\quad a_n = 0 \quad \forall n < 0.$

Allora se pongo $f(z_0) = a_0 \Rightarrow f$ è olomorfo su $\Omega$.

In questo caso ho una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

$\underline{\text{II}^\circ \text{ caso}}$ C'è un minimo $k<0$ tale che $a_k \neq 0$ e quindi

$k<0$ , $a_k \neq 0$ , $a_m = 0$ se $m < k$

Allora dico che $f$ ha un <u>POLO</u> di ordine $k$ in $z_0$

$\underline{\text{III}^a}$ caso Se ci sono $\infty$ $k<0$ con $a_k \neq 0$ dico che $z_0$ è una <u>SINGOLARITÀ ESSENZIALE</u> per $f$.

Per esempio, $\dfrac{1}{(z+1)^3}$ ha polo di ordine 3 in $-1$

. $e^{\frac{1}{z}}$ ha una sing. essenziale in zero

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

**Fatto** • $z_0$ è eliminabile $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ è limitata vicino a $z_0$

• $z_0$ è un polo di ordine $\leq k \Longleftrightarrow (z-z_0)^k f(z)$ è limitata vicino a $z_0$

**Dim.** Se $z_0$ è un polo di ordine $\leq k$ $\quad f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$\Rightarrow (z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m-k} (z-z_0)^m = h(z)$$

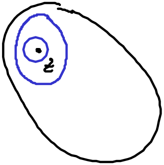
$h(z)$ è espressa da una serie di Taylor $\Rightarrow$ $h$ si prolunga con continuità in $z_0$ $\Rightarrow$ $h(z)$ è limitata vicino a $z_0$.

DUNQUE $(z-z_0)^k f(z)$ è limitata vicino a $z_0$.

VICEVERSA $(z-z_0)^k f(z)$ sia limitata vicino a $z_0$.

So che $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$

dove $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D(z_0,R)} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$




con $0 < R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$

Supponiamo che $n < -k$ $(n+k<0)$

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,R)} \left| \frac{(z-z_0)^k f(z)}{(z-z_0)^{n+k+1}} \right| dz \le$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{M}{R^{n+k+1}}\, dz = M \frac{1}{R^{n+k}} \xrightarrow{\text{se } R \to 0} 0$$

perché $n+k<0$

CIOÈ $a_n = 0$ se $n < -k$ $\Rightarrow$ POLO DI ORDINE $\le k$

**Def.** Data una singolarità isolata $z_0$ pongo

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$ (coeff di ordine $-1$ nello sviluppo di Laurent attorno a $z_0$)

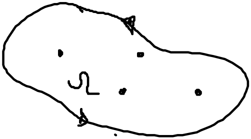
residuo di $f$ in $z_0$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,R)} f(z)\,dz$$

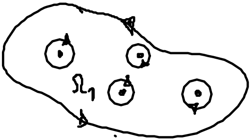
**Teorema** (I° teorema dei residui)

$\Omega$ aperto, $z_1 \dots z_k \in \Omega$, $f$ olomorfa su $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j)$$



Dim. Prendo $R>0$ tale che ogni $D(z_j,R) \subset \Omega$ e non interseca $D(z_h,R)$ se $j \neq h$.




$$\Omega_1 = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{K} \overline{D(z_j,R)}.$$

Per il teorema di Cauchy

$$0 = \int_{\partial\Omega_1} f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{K} \int_{\partial D(z_j,R)} f(z)\,dz$$

MA PER LE FORMULE DI PRIMA $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_j,R)} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(f, z_j)$

$\Rightarrow$ TESI

· <u>Esempio</u> $\quad f(z) = \dfrac{z+2}{z - z^3} = \dfrac{z+2}{z(z-1)(z+1)}$

So che (RIDUZIONE IN FRATTI SEMPLICI)

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1} .$$ Voglio determinare $A, B, C$

· Noto che $f$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$.

· $f(z) = \dfrac{A}{z} + \underbrace{\text{qualcosa che è olomorfo vicino a zero}}_{\text{ho tutti gli } a_n = 0 \text{ se } n<0 \text{, vicino a zero}}$

$\Rightarrow \quad A =$ residuo di $f$ in $z = 0$

(ora $z_0 = 0$ è un polo di ordine 1)

· Per lo stesso motivo $B = \mathrm{Res}(f,-1)$, $C = \mathrm{Res}(f,1)$

Cerchiamo di determinare gli residui guardando l'espressione di $f$.

IN $z=0$ $\quad f(z) = \dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)} = \dfrac{1}{z}\Big[\underbrace{\dfrac{z+2}{z^2-1}}_{\text{OLOMORFO IN ZERO}}\Big] =$

$\dfrac{1}{z}\left[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right]$ $\qquad (a_0 = -2)$

METTO $z=0$ IN $[\cdot]$

$= \dfrac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots \implies \mathrm{Res}(f,0) = a_0 = \boxed{-2}$

termine di ordine $-1$

Per trovare $\operatorname{Res}(f,0)$

$$\left.\frac{z+2}{z\,(z+1)(z-1)}\right|_{z=0} = -2$$

CANCELLO

$$\frac{z+2}{z(z+1)(z-1)} = \frac{-2}{z} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1}$$

CONTA IL FATTO CHE SONO POLI SEMPLICI

Per trovare $\operatorname{Res}(f,1)$

$$\left.\frac{z+2}{z\,(z+1)\cancel{(z-1)}}\right|_{z=1} = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \left.\frac{z+2}{z\,(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{1}{-2} = -1/2$$