Complementi di Matematica
Settima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

19 ottobre 2009

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Esiste $F : \Omega \to \mathbb{C}$, olomorfa, con $F' = f$ $\iff$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

per ogni γ_1, γ_2 curve aventi gli stessi estremi $\iff$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0 \qquad \forall\ \gamma \text{ chiuse}$$

Inoltre se F è primitiva di f $\Rightarrow$ $(\gamma : [a,b] \to \Omega)$

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(P) - F(Q)}$$

($\underline{\Omega \text{ CONNESSO}}$)

dove $\gamma(a) = Q$ $\gamma(b) = P$

In particolare le primitive differiscono per una costante

Esempio (negativo) $f(z) = \frac{1}{z}$ $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

olomorfa. Si vede che:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

dove $\gamma(t) = e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$

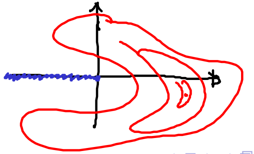
(γ descrive la circonferenza $\{|z| = 1\}$, percorsa in senso antiorario)

$\Rightarrow$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Rightarrow$ $\frac{1}{z}$ non ammette nessuna primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Se togliamo a $\mathbb{C}$ (per esempio) la semiretta $\mathbb{R}^- = \{z \in \mathbb{R},\ z \le 0\}$ cioè consideriamo $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Ω è semplicemente connesso (si vede ..)

In Ω $\frac{1}{z}$ ammette primitive !!

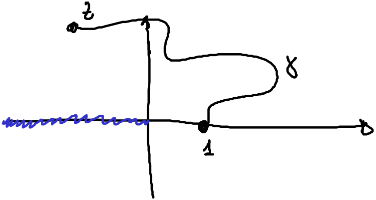


Cerchiamo la primitiva $F(z)$ con la condizione $F(1)=0$

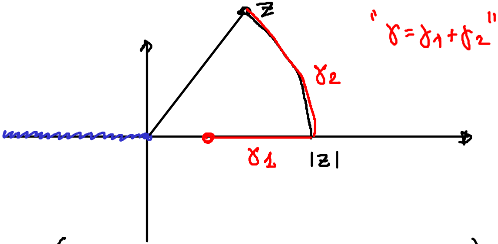
Tale primitiva risulta definita da

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$

dove γ è una qualunque curva $\gamma : [0,b] \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ con $\gamma(0) = 1$, $\gamma(b) = z$.



Scelgo γ come sotto



(1) $$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_1^{|z|} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^{|z|} = \ln(|z|)$$

$$\left(\gamma_1(t) = 1 + t(|z|-1) \ldots \right)$$

(2) $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz =$

$$\int_0^{\theta_0} \frac{1}{|z|e^{it}} \cdot i|z|e^{it}\,dt =$$

$$\int_0^{\theta_0} i\,dt = i\,\theta_0 = i\,\mathrm{Arg}(z)$$

$\gamma_2(t) = |z|\,e^{it}$ $\quad 0 \le t \le \mathrm{Arg}(z)$

dove $\mathrm{Arg}(z) = \theta_0$ tale che

$-\pi < \theta_0 < \pi$ $\quad z = |z|\,e^{i\theta_0}$

Noto che $z \in \mathbb{R}^-$

DUNQUE $\boxed{F(z) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z)}$

NON SI PUÒ ESTENDERE A UNA FUNZIONE CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Posso dire che tale F è una "determinazione" di $\ln(z)$.

Notiamo che $F(e^z) = z$ e $e^{F(z)} = z$ (dove ha senso)

Infatti (a) $\frac{d}{dz} F(e^z) = \frac{1}{e^z}\frac{d}{dz} e^z = \frac{1}{e^z} e^z = 1 \Rightarrow F(e^z) = c + z$

Se metto $z = 0$ $\Rightarrow$ $c + z = F(1) = 0$ $\Rightarrow$ $c = 0$ $\Rightarrow$ $F(e^z) = z$!!

(b) $\frac{d}{dz}\frac{e^{F(z)}}{z} = \frac{e^{F(z)}\,\frac{1}{z}\cdot z - e^{F(z)}\cdot 1}{z^2} = 0 \Rightarrow e^{F(z)} = \text{cost}\cdot z$ $\left(e \text{ cost} = 1 \right)_{z=1}$

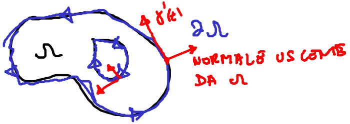
· <u>Def.</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ricordiamo che

· Ω è aperto se $\forall z_0$ esiste $\rho>0$ tale che $D(z_0,\rho) \subset \Omega$

· Ω è chiuso se $\complement\Omega$ è aperto ($\complement$ = complementare)

· $\partial\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : \forall \rho > 0 \ D(z_0,\rho) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $D(z_0,\rho) \cap \complement\Omega \neq \emptyset \}$

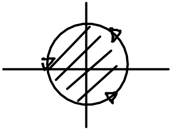
($D(z_0,\rho)$ contiene punti di Ω e punti fuori Ω.

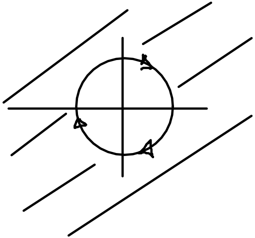


· Ω ha bordo regolare se $\partial\Omega$ "è descritto da $n+1$ curve" $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_n$, cioè $\partial\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} \text{supporti}(\gamma_k)$ e ogni γ_k è C^1 a tratti, iniettiva eccetto che agli estremi, e "percorre" $\partial\Omega$ tenendo Ω alla sinistra

<u>NOTA</u> con questa def. $D(0,1)$ e $\mathbb{C} \setminus D(0,1)$ hanno lo stesso bordo, ma le le curve che descrivono i due bordi sono

. "percorse in sensi opposti"





. $\bar{\Omega}$ = chiusura di Ω = $\Omega \cup \partial\Omega$

Def. Ω aperto regolare, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$,
e continua su $\bar{\Omega}$.

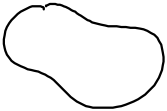
$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \underset{\text{DEF.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

dove $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_N$ descrivono $\partial\Omega$

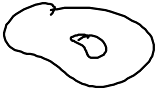
(stop automaticamente prescrivendo il verso di ogni γ_k)

Andrebbe verificato che tale integrale non dipende dalle curve utilizzate (si fa ...)

· **Nota** Si potrebbe vedere che un aperto, connesso, limitato, con $\partial\Omega$ regolare è semplicemente connesso se e solo posso descrivere $\partial\Omega$ con una sola curva (chiusa)



S.C.

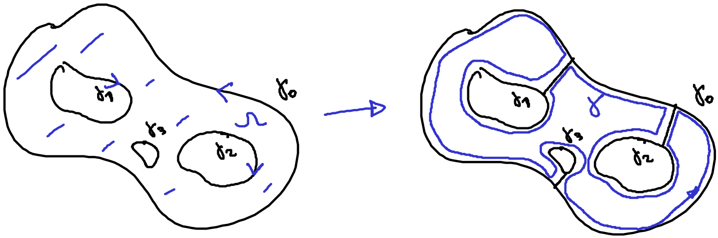


NON S.C.

Teorema (teorema di Cauchy) $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, continua su $\overline{\Omega}$ e olomorfa su Ω. $\partial\Omega$ sia regolare. Allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$

Dim. Idea di dimostrazione



$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

$$- \int_{\text{segmenti}} f(z)\,dz \qquad = \qquad 0$$ perché γ_0 è deformabile a un pto

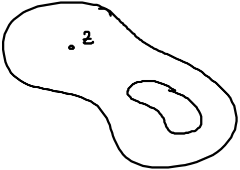
$\parallel$ 0 (ogni segmento è percorso due volte, una volta in un verso, una volta nel verso opposto)

Formula di Cauchy: Ω aperto con $\partial\Omega$ regolare.

$f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa su Ω.

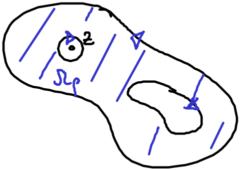
Allora $\forall z \in \Omega$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$



Nota che l'integranda non è olomorfa rispetto ζ, in quanto il denominatore si annulla quando $\zeta = z$

Dim.



Fisso $\rho > 0$. Considero $\Omega_\rho = \Omega \setminus D(z,\rho)$

$z \notin \Omega_\rho$, $\quad \partial\Omega_\rho = \partial\Omega \; - \; \partial D(z,\rho)$

"$-$" indica che ∂D è orientato nel senso opposto"

per il t. di Cauchy
$$\int_{\partial\Omega_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = (1)$$

circonferenza percorsa in verso antiorario.

$$(1) = \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$\to 0$ se $\rho \to 0$

$$\int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_{\partial D(0,\rho)} \frac{1}{w}\, dw = 2\pi i\, f(z)$$

(indipendente da ρ)

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

DUNQUE $\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq M$ se ζ VICINO A z

· Dunque se ρ piccolo $|\zeta - z| = \rho$ $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| \leq M$

$$(?) = \left|\int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leq M \text{ lunghezza}\big(\partial D(z,\rho)\big) = M\, 2\pi\rho$$

Se ne deduce $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z)$ $\Rightarrow$ tesi.

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$

· <u>Fatti</u> · Supponiamo che $f_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, f_n continue

γ curva in $\overline{\Omega}$, γ C^1 a tratti

$$f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f \qquad f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$$

Allora $\displaystyle\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz.$

<u>Dim.</u> (si scrive la def. di $\int_\gamma f_n(z)\,dz$ e si imita la dim. del caso reale)

· Se f_n sono olomorfe su Ω, $f_n' \xrightarrow{\text{UNIF.}} g$, $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$

$\Rightarrow$ f olomorfa e $g = f'$ (Ω connesso)

<u>Dim</u> Fisso P, Q in Ω, e prendo γ che congiunge P e Q

So che $\displaystyle\int_\gamma f_n'(z)\,dz = f_n(P) - f_n(Q)$

· Faccio tendere $n \to \infty$ e sfrutto il punto precedente

$$\int_\gamma g(z)\,dz = f(P) - f(Q)$$

Per i teoremi dello volta scorsa f è olomorfa e $g = f'$

· I teoremi fatti per le serie di potenze valgono anche in campo complesso:

se $\{a_n\}$ è una succ. in $\mathbb{C}$; se $\bar{R} = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

e se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, \bar{R})$

$$\Rightarrow \quad f \text{ è } C^\infty \text{ e } \quad f^{(k)}(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ (n=k)}}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

dove la serie delle derivate ha pure lei raggio di conv. $\bar{R}$.

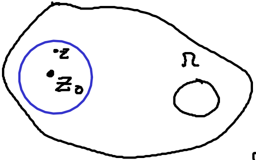
Teorema $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$, continua in $\overline{\Omega}$ e olomorfa in Ω. Allora dato $z_0\in\Omega$, posto $R=\mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)$

$\Rightarrow$ se $z\in D(z_0,R)$ $\quad f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$ $\quad$ dove

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

Dim. Fisso $z_0\in\Omega$.

R tale che $\overline{D(z_0,R)}\subset\Omega$.



Scrivo la formula di Cauchy nel disco $D(z_0,R)$. Dato $z\in D(z_0,R)$ si ha $2\pi i\, f(z)=$

$$\int_{\partial D(z_0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{\partial D(z_0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0+z_0-z}\,d\zeta=$$

$$= \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \, d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

"dato che la serie geom. converge unif. su ogni disco di raggio < 1"

posso scambiare integrale e serie e ottengo:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right)}_{a_n \cdot 2\pi i} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$