Complementi di Matematica
Sesta lezione

prof. Claudio Saccon

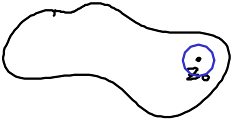
Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

15 ottobre 2009

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{C}$

Ω aperto di $\mathbb{C}$ (se $z_0 \in \Omega$ esiste $\rho > 0$ tale che $D(z_0, \rho) \subset \Omega$)

(diremo cosa significa che f è derivabile e vedremo le conseguenze — sorprendenti — di questa def.)



Def. $z_0 \in \Omega$, dico che f è derivabile in z_0 se esiste

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

(NOTA CHE SI TRATTA DI UN LIMITE IN DUE VAR. $z = x + iy$)

Dico che f è OLOMORFA in Ω se f è derivabile in ogni z_0 di Ω.

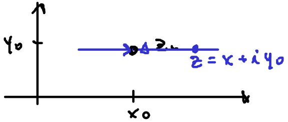
CONSEGUENZE DELLA DEF.:

$$f(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

dove $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

Se esiste $f'(z_0)$, lo posso calcolare facendo gli incrementi reali

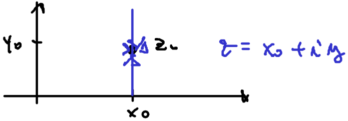
$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x, y_0) + i f_2(x, y_0) - f_1(x_0, y_0) - i f_2(x_0, y_0)}{x - x_0}$$



$$= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ “}=\text{” } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ma posso anche fare gli incrementi immaginari puri:

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_1(x_0, y) + i f_2(x_0, y) - f_1(x_0, y_0) - i f_2(x_0, y_0)}{i(y - y_0)}$$



$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0) = \text{“}\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\text{”}$$

$$= -i \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0)$$

Ne ricavo che se f è derivabile in z_0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{cioè:} \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}} \quad (C.R.)$$

CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

<u>Teorema</u> $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfo su Ω SE E SOLO SE VALGONO le C.R. su tutto Ω.

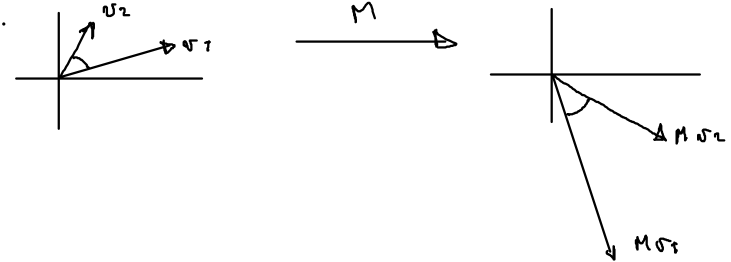
Le C.R. implicano che la mappa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$) ha una struttura particolare:

$$\text{Jacobiana di } f_M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

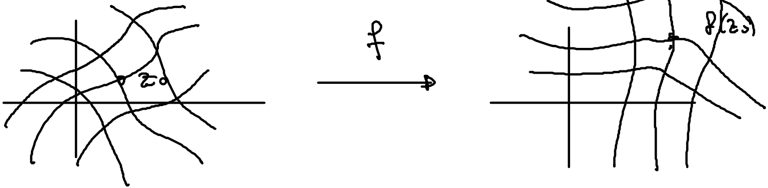
dove $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e θ è tale che $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

UNA TALE MATRICE "MANTIENE GLI ANGOLI"



dato che $J_f = M$ anche la f mantiene gli angoli



Questo è conseguenza di:

- f derivabile in z_0 $\implies$ $f(z) \simeq f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}$
- il prodotto complesso è la composizione di una rotazione e di un'omotetia.

Fatti Valgono i soliti teoremi: f_1, f_2 derivabili

- $f_1 + f_2$ derivabile e $(f_1+f_2)' = f_1' + f_2'$
- $f_1 \cdot f_2$ derivabile e $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1'$
- $f_1 \circ f_2$ (se ha senso) è derivabile e $(f_1 \circ f_2)' = (f_1' \circ f_2) \cdot f_2'$
- $\frac{1}{f_1}$ der. (se $f_1 \neq 0$) e $\left(\frac{1}{f_1}\right)' = \frac{-f_1'}{(f_1)^2}$

<u>Esempi</u> . $f(z) = z$ è derivabile e $f'(z) = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{z - z_0}}{\cancel{z - z_0}} = 1$$

. $f(z) = \text{cost} \Rightarrow f'(z) = 0$

<u>Fatto</u>: Se $f'(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$ e se Ω è connesso

$\Rightarrow$ f è costante

<u>Esempi</u> $f(z) = z^m$ $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists f'(z) = m z^{n-1}$

(se $m < 0$ ci vuole $z \neq 0$)

. $f(z) = |z|^2$ NON È OLOMORFA

$f(z) = x^2 + y^2 = f_1$ VEDIAMO C.R. $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$

$f_2 = 0$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

NON VALGONO LE C.R. (tranne che in $z_0 = 0$)

Fatto Se f è olomorfo e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f è costante

Dim se $f_2 = 0$ trovo $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ $\Rightarrow$ $f'(z) = 0$ $\forall z$

$\Rightarrow$ $f(z)$ costante . $\boxed{\Omega \text{ CONNESSO}}$

Esempio $f(z) = e^z$. f è olomorfa .

MODO 1 $f(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$

$f_1(x,y) = e^x \cos(y)$ CONTROLLIAMO LE C.R.

$f_2(x,y) = e^x \sin(y)$

$\frac{\partial}{\partial x} f_1 = e^x \cos(y)$ $\frac{\partial}{\partial y} f_1 = -e^x \sin(y)$

Torna

$\frac{\partial}{\partial x} f_2 = e^x \sin(y)$ $\frac{\partial}{\partial y} f_2 = e^x \cos(y)$

MODO 2 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Caso $z_0 = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{z\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \lim_{z\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = 1$$

$f'(0) = 1$. caso generale $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} e^{z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z-z_0} = e^{z_0} \lim_{w\to 0} \frac{e^w - 1}{w}$$

$$= e^{z_0}$$

Dunque $\underline{e^z \text{ è derivabile e}}$ la sua derivata è $\underline{e^z}$

INTEGRAZIONE SULLE CURVE

$\Omega \subset \mathbb{C}$ $\qquad \gamma : I \to \Omega$ è una curva (I = intervallo)

$\sim$ curva in $\mathbb{R}^2$ $\qquad (\gamma_1, \gamma_2) \sim \gamma_1 + i\gamma_2$

Def. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, γ è una curva C^1 a tratti in Ω

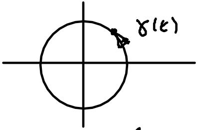
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_I f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

prodotto complesso

($\gamma'(t)$ è la derivata -tradizionale- rispetto a t

Esempio (da ricordare) $f(z) = \frac{1}{z}$; $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$



$$\gamma'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = \boxed{i\,e^{it}}$$

(NOTA CHE se $g(z)$ è derivabile in senso complesso $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\, g(z_0 t) = z_0 \cdot g'(z_0 t) \;)$$

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}} \cdot i\,\cancel{e^{it}} \cdot dt = 2\pi i$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i\sin(t)} \cdot i \cdot \ldots = 2\pi i$$

· Supponiamo ora che f sia olomorfa, $f = f_1 + i f_2$

- per C.R. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$; $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$

Chiamo $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix}$

<u>Ne viene</u>

$$\frac{\partial}{\partial y} h_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} h_{2,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$\Rightarrow \vec{h}_1$ è irrotazionale

$$\frac{\partial}{\partial y} h_{1,1} = \frac{\partial}{\partial y} f_1$$
$$\frac{\partial}{\partial x} h_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x}(-f_2)$$

$\Rightarrow \vec{h}_2$ è irrotazionale

· Inoltre, se $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_I \Big(f_1(\gamma_1,\gamma_2) + i f_2(\gamma_1,\gamma_2)\Big)(\gamma_1 + i\gamma_2)'\,dt =$$

$$\int_I \Big(f_1(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1' - f_2(\gamma_1,\gamma_2)\cdot\gamma_2'\Big)\,dt \quad +$$

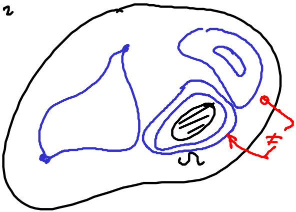
$$i\int_I \Big(f_1(\gamma_1,\gamma_2)\,\gamma_2' + f_2(\gamma_1\gamma_2)\,\gamma_1'\Big)\,dt \quad =$$

$$\int_I \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} dt + i \int_I \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_\gamma \vec{h}_1\,d\gamma + i\int_\gamma \vec{h}_2\,d\gamma \qquad \left(\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \right)$$

Per quanto visto la volta scorsa:

- $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)$ se γ_1 è omotopa a γ_2



- Se Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow$
$\int_\gamma f(z)\,dz$ dipende solo da $f(P)$ e $f(Q)$ dove P e Q sono gli estremi di γ

Se γ chiusa $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Def. Dico che F è primitiva di f se $F' = f$. (in Ω)

Teorema $f : \Omega \to \mathbb{C}$, olomorfa.

- f ammette una primitiva F $\iff$ $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$ sono conservativi

Dim. $\Rightarrow$ Sia F primitiva di f. $F = F_1 + i F_2$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \overset{\text{CR per } F}{=} \frac{\partial F_2}{\partial y} \overset{F'=f}{=} f_1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial y} = f_2$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial F_1}{\partial x} = f_1$ $\quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -f_2$

cioè $\nabla F_1 = \vec{h}_1$

$\Rightarrow \vec{h}_1$ conservativo

(F_1 è un potenziale per $\vec{h}_1$)

Analogamente

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = f_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = f_1 \iff \nabla F_2 = \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_2 \text{ conservativo.}$$

$\Leftarrow$ suppongo che $\vec{f}_1$ abbia un potenziale U_1 e
$\vec{f}_2$ abbia un potenziale U_2

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x} = f_2$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = -f_2 \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y} = f_1$$

Pongo $F(z) = U_1 + i U_2$. Vedo che F è olomorfa dato che (vedi sopra) valgono C. R. e

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f_1 + i f_2 = f \implies F \text{ è primitiva di } f.$$

Ne segue che. SONO EQUIVALENTI

- f ha una primitiva
- $\int_\gamma f(z)\,dz$ dipende solo da P, Q $(P=\gamma(a)\quad Q=\gamma(b))$
- $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ se γ è chiusa

INOLTRE SE f ha una primitiva F $\Rightarrow$

$\circledast$ $\int_\gamma f(z)\,dz = F(P) - F(Q)$ dove $\gamma(a)=P\quad \gamma(b)=Q$

INFATTI $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \vec{h}_1 + i\int_\gamma \vec{h}_2 = \underbrace{U_1(P) - U_1(Q) + i\left(U_2(P) - U_2(Q)\right)}_{F(P)-F(Q)}$

se U_1/U_2 potenziali. Da quanto visto prima

- Se Ω è semplicemente connesso esiste sempre una primitiva

· Esempi (importanti)

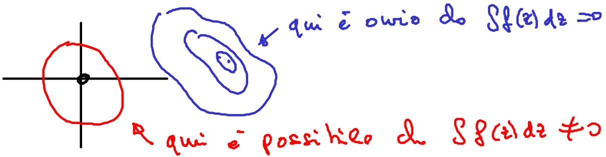
Se $f(z) = z^n$ con $n \neq -1$ $\Rightarrow$ f ammette primitiva

Infatti $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ è una primitiva

Dunque tutte le potenze negative, ECCETTO $\dfrac{1}{z}$, sono "buone" nonostante siano definite su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ che NON è semplicemente connesso.

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^n}\, dz = 0 \quad (n \neq 1)$$

su ogni curva chiusa – anche se tale curva "allaccia" l'origine



Invece se prendo $f(z)=\frac{1}{z}$, abbiamo già visto

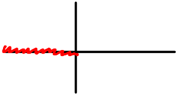
$$\int_{\text{circonferenza}} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$$

$\frac{1}{z}$ NON ammette primitiva su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

cioè NON esiste nessuna funzione $F:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$

con $F'(z)=\frac{1}{z}$

Se invece restringo $\frac{1}{z}$ a $\underbrace{\mathbb{C}\setminus\{\text{numeri reali} \leq 0\}}_{\text{semplicemente connesso}}$, Allora



trovo una primitiva di $\frac{1}{z}$ su tale insieme