Complementi di Matematica
Quinta lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

13 ottobre 2009

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n} \qquad a_n = n+1 \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n+1} \to 1 \qquad \bar{R} = 1$$

$$\parallel$$

$f(x)$ è definito per $-1 < x < 1$. Posso calcolare $f(x)$?

- prendo $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ (anche per g il raggio è 1)

$\Rightarrow$ ("derivazione per serie") $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

Chi è $g(x)$? $g(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$

$$f(x) = g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$\left(f(0) = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)0^n = 1 \qquad \text{TORNA} \right)$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = f(x)}$$

Raggio $= 1$ $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n+2}} \to 1 \right)$

f è definita per $-1 < x < 1$

$$x^2 f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} =: g(x)$$

Allora $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+2} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

$g'(x) = \frac{x}{1-x}$ da cui $g(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt + \underbrace{\cancel{g(0)}}_{=0}$

ma $g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{n+2}}{n+2} = 0$

$$\int \frac{x}{1-x}\,dx = \int \frac{x-1+1}{1-x}\,dx = \int \left(-1 - \frac{1}{x-1}\right) dx = -x - \ln(|x-1|) + c$$

$= -x - \ln(1-x) + c \Rightarrow g(x) = -x - \ln(1-x)$

DA QUESTO SEGUE $f(x) = \frac{g(x)}{x^2} = \boxed{-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}}$

Si noti che $\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{1-x}(-1)}{2x} =$

$-\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-x-1}{1-x}}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}}{(1-x)2\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-x)2} = \frac{1}{2}$

che è proprio $f(2)$ (come si capisce mettendo zero nella serie)

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \\ \frac{1}{2} \quad \text{se } x=0 \end{cases}$$

(è continua - anzi C^∞)

se $-1 < x < 1$

Per esercizio provare a calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

(sempre cercando di ricondursi alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

(ricondursi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$)

Altro esempio Potrei definire $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)$ $(z \in \mathbb{C})$

(lo posso fare perché verifico subito che il raggio di conv. $= +\infty$)

Verifichiamo che $f(z)\,f(w) = f(z+w)$. Infatti

$$f(z)\,f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n =$$

dove c_n (prodotto di Cauchy) $= \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \frac{z^{n-m}}{(n-m)!}$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} w^m z^{n-m}}_{(z+w)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = f(z+w)$$

$$\boxed{f(0) = 1 \; ; \; e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

(si potrebbe fare lo stesso ponendo

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

e allora

$$e^{a+ib} = e^{a}\left(e^{ib}\right) = e^{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!}\right) =$$

$$e^{a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$e^{a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$e^{a}\left(\cos(b) + i \sin(b)\right)$$

Soluzione di eq. diff. "per serie"   Per es.

$$y'' - y = e^x$$

Idea cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (l'incognita è $\{a_n\}$)

Ammettiamo che una tale y ci sia e "che tutto torni"

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Se y verifica l'equazione deve essere

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = 0 \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n - \frac{1}{n!} \right) x^n = 0$$

FATTO: una serie di potenze è identicamente nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli

$$\iff \forall n \geq 0 \quad a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n - \frac{1}{n!} = 0$$

(RELAZIONE RICORSIVA SUGLI a_n)

$$\circledast \quad \forall n \geq \quad a_{n+2} = \frac{a_n - 1/n!}{(n+1)(n+2)}$$

(NOTA CHE $(n+1)(n+2) \neq 0$)

NOTA a_0 e a_1 SONO LIBERI e viceversa se fisso a_0 e a_1

allora tutti gli altri a_n sono determinati da $(*)$

$$a_2 = \frac{a_0 - 1/0!}{2} \qquad a_3 = \frac{a_1 - 1/1!}{2 \cdot 3}, \quad a_4 \dots$$

HO DUE "GRADI DI LIBERTÀ". ORA TORNIAMO INDIETRO

Fissati a_0 e a_1, detta $\{a_n\}$ la succ. generata da $(*)$

faccio $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ per trovare il raggio di conv. (?)

Notiamo che in $(*)$ i termini con n pari e quelli con n dispari si possono calcolare separatamente

$$b_n = a_{2n} \qquad c_n = a_{2n+1}$$

quindi $$b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{a_{2n} - 1/_{2n!}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{b_n - 1/_{2n!}}{(2n+1)(2n+2)}$$

trovo un'analoga relazione sui b_n

$$b_{n+1} = \frac{b_n - 1/2n!}{(2n+1)(2n+2)}$$

ORA POSSO dire che $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1 - 1/(b_n \cdot 2n!)}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \to 0$

CON i $\{c_n\}$ si fa lo stesso discorso $\Rightarrow$ alla fine $\sqrt[n]{a_n} \to 0$

$\Rightarrow \bar{R} = +\infty$, cioè la funzione $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(che è univocamente determinata da a_0 e e_0) è def $\forall x \in \mathbb{R}$

e per i teoremi sulle serie di potenze risolve l'eq.

TUTTO QUESTO ERA GIÀ NOTO ($a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$)

Nel problema appena visto si poteva senza problemi trovare esplicitamente la sol. (metodi standard per le eq. a coeff. costanti)

Vediamo un esempio "non standard"

(E) $\quad x\, y'' - y = 0$

Si tratta di un'eq. del secondo ordine LINEARE, OMOGENEA ma non è in "FORMA NORMALE" (non posso dividere per x)

C'è da aspettarsi qualcosa di male per $x \sim 0$

COME PRIMA CERCO $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; se tutto va bene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} \qquad\qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1) x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad x\sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$0 = a_0$$

$$a_{n+1}(n+1)n = a_n \qquad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow$ a_0 È <u>BLOCCATO</u> ; da 1 in poi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ $\left(n(n+1) \neq 0\right)$

a_1 È <u>LIBERO</u> , da 2 in poi tutto è determinato da a_1

$a_0 = 0$, a_1 , $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$; $a_3 = \dfrac{a_2}{2 \cdot 6} = \dfrac{a_1}{2^2 \cdot 3}$;

- $a_4 = \frac{a_3}{3\cdot 4} = \frac{a_1}{2^2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{a_1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4}$ . . . .

IDEA $\boxed{a_n = \frac{a_1}{n((n-1)!)^2}}$. Per controllare se è vero posso

- controllare $a_1 = \frac{a_1}{1\cdot(0!)^2} = a_1$

- vedere se la formula rispetta la ricorsione

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n\cdot(n+1)} = \frac{a_1}{n((n-1)!)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a_1}{(n+1)(n!)^2} \quad \underline{\underline{OK}}$$

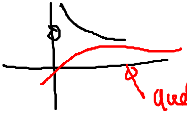
Si capisce facilmente che $\sqrt[n]{a_n} = 0 \Rightarrow \bar{R} = +\infty$ e quindi

$y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n((n-1)!)^2}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e verifica (E) (e usando le prop. delle serie di potenze si vede che tali y sono le uniche sol. di (E) su $\mathbb{R}$)

DUNQUE LE SOL. DI (E) "regolari su tutto $\mathbb{R}$" verificano $y(0)=0$ (mentre posso prescrivere $y'(0)$)

- Se esamino le soluzioni di (E) su $]0,+\infty[$ (a causa del teorema di Cauchy) ho "due parametri liberi", per esempio posso risolvere assegnando ad arbitrio $y(1)$ e $y'(1)$

Dunque tra queste sol. "solo una parte" è "regolare" in zero



quelle che ho trovato

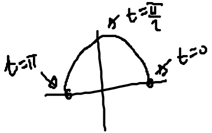
L'EQ. NON È IN FORMA NORMALE SU $\mathbb{R}$

Richiami sugli integrali di linea, su campi di forze e potenziali

Def. (curva). Una curva è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$.

Per esempio $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $\quad 0 \leq t \leq \pi$

è una curva in $\mathbb{R}^2$ (e descrive una mezza circonferenza)



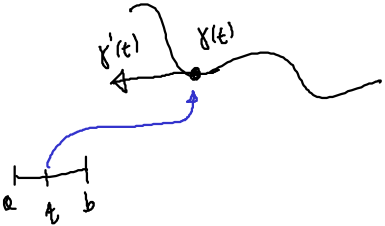
L'insieme dei punti $\{\gamma(t) : t \in I\}$ è il supporto di γ (la semicirconferenza, nell'esempio).

Se $I = [a,b]$ e se $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva si dice chiusa

Def. Dico che γ è C^1 se γ è derivabile (componente per componente)

e chiamo $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_N'(t) \end{pmatrix}$ (rappresenta la direzione tangente a γ nel punto $\gamma(t)$

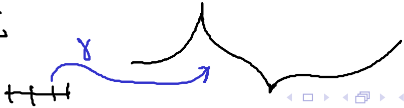
e il modulo di $\gamma'(t)$ è la "velocità" di γ all'istante t)



Più in generale dirò che γ è C^1 a tratti se $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$

$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, γ è C^1 se ristretto a ogni $I_1, \dots, I_k$

ed è continua su I



Def. Chiamo "campo vettoriale" su Ω una funzione $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un "dominio" di $\mathbb{R}^N$

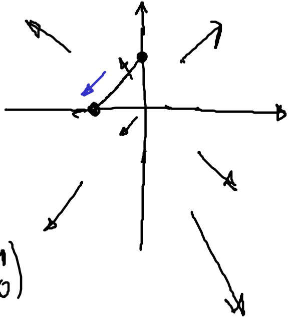
Def. Se $\vec{f}$ è un campo su Ω e se γ è una curva C^1 in Ω (cioè il supporto di γ è dentro Ω); pongo

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\gamma = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

(LAVORO DI $\vec{f}$ LUNGO γ)

PRODOTTO SCALARE

Per esempio $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

(descrive il segmento tra $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\int_\gamma f\, d\gamma = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \gamma(t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt =$$

$$\left(\gamma'(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad = \int_0^1 \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t - 1)\, dt =$$

$$\left[t^2 - t \right]_0^1 = 0$$

Def. Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ è una curva, se $\varphi : I' \to I$, φ BIGETTIVA.

posso considerare $\gamma_1 : I' \to \mathbb{R}^N$ $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$

Dico che γ_1 è una "riparametrizzata" di γ

Se φ manda estremo destro/sinistro di I' nel corrispondente estremo destro/sinistro di I

(NOTA: γ e γ_1 HANNO LO STESSO SUPPORTO)

φ mantiene il verso

se scambio gli estremi dico che φ inverte il verso

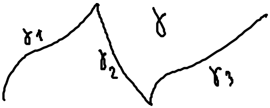
Fatto
$$\int_\gamma \vec{f}\, d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\gamma_1 \quad \text{se } \varphi \text{ mantiene il verso di } \gamma$$

$$= -\int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\gamma_1 \quad \text{se } \varphi \text{ inverte il verso di } \gamma$$

Def. Se γ è C^1 a tratti

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\gamma = \text{" SOMMA DI } \int_{\gamma_i} \vec{f}\, d\gamma_i \text{ "}$$

dove γ è ottenuta "incollando" $\gamma_1\ \gamma_2 \dots \gamma_k$



Def. Se esiste una funzione $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$\vec{f} = \nabla U$ dico che $\vec{f}$ è conservativo e

chiamo U un potenziale per $\vec{f}$

Esempio $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ posso considerare $U(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = x \quad , \frac{\partial U}{\partial y} = y$ cioè $\nabla U = \vec{f}$

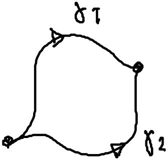
<u>Teorema</u> Sono fatti equivalenti $\left(\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N \right)$

(a) $\vec{f}$ è conservativo

(b) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ sono due curve C^1 / C^1 a tratti

tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{f} \, d\gamma_2$$



(c) Se γ è una curva chiusa in Ω, allora

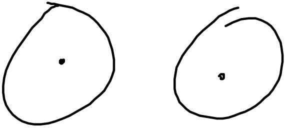
$$\int_\gamma \vec{f} \, d\gamma = 0$$

Inoltre se $\vec{f}$ è conservativo e se Ω è "connesso", si ha

$$U(P) = \int_\gamma \vec{f} \, d\gamma$$ dove γ va da P_0 a P (al variare di P_0 in Ω)

Def. Connesso significa che tra due punti di Ω c'è una curva che li unisce

CONNESSO



NON CONNESSO

Def. Se $\vec{f}$ è un camp di classe C^1 (le sue componenti "sono derivabili rispetto a tutte le direzioni")

$\vec{f}$ è irrotazionale se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j$

(se $N=2$ ciò significa $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$)

Fatto Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ f è irrotazionale.

Dim. caso $N=2$ $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$

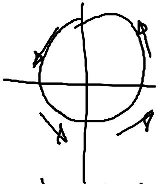
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

egual

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

PERÒ NON VALE IL VICEVERSA

$$\cdot\ f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$



IRROTAZIONALE

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

MA $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\, d\gamma = ?$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi \quad (\text{chiuso})$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\gamma = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \dfrac{-\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ \dfrac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

NON È CONSERVATIVO !

Def. Siano γ_0 e $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ (due curve)

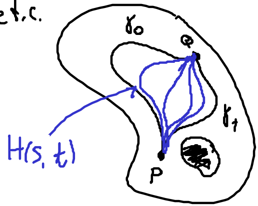
Dico che γ_0 e γ_1 sono omotope "a estremi fissi" se

(1) $\gamma_1(a) = \gamma_0(a) = P$; $\gamma_1(b) = \gamma_0(b) = Q$

(2) $\exists\ H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$, H continua e.t.c.

- $H(s,a) = P \quad H(s,b) = Q$
- $H(0,t) = \gamma_0(t)$
- $H(1,t) = \gamma_1(t)$

(posso "deformare" γ_1 e γ_2 dentro Ω)

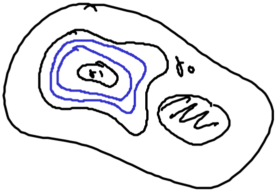


(2) γ_0 e γ_1 sono omotope "come curve chiuse" in Ω se

(1) γ_0 e γ_1 sono curve chiuse (su $[a,b]$)

(2) $\exists\ H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ tale che

- $H(s,a) = H(s,b)$
- $H(0,t) = \gamma_0(t)$
- $H(1,t) = \gamma_1(t)$



Teorema Se $\vec{f}$ è irrotazionale su Ω. Si ha:

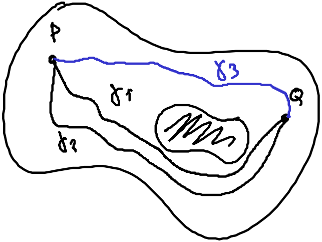
(1) Date due curve con gli stessi estremi γ_1 e γ_2; se sono omotope "a estremi fissi"

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} = \int_{\gamma_2} \vec{f}$$

(2) Date due curve chiuse γ_1 e γ_2, se sono omotope come curve chiuse allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} = \int_{\gamma_2} \vec{f}$$

$\vec{f}$ irrotazionale



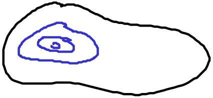
→ gli integrali su γ_1 e γ_2 coincidono

– $\int_{\gamma_1} \vec{f} \neq \int_{\gamma_3} \vec{f}$

<u>Teorema</u> Se Ω "non ha buchi" ogni campo irrotazionale è conservativo.

<u>Def.</u> Ω è "semplicemente connesso" se ogni curva chiusa è omotopa a una costante

OK



NO