Complementi di Matematica
Quarta lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

12 ottobre 2009

Serie di potenze

Dati $(a_n)_n$ successione in $\mathbb{C}$ (numeri complessi) e $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Nel seguito le nozioni di convergenza/convergenza uniforme/convergenza totale si applicano a funzioni a valori complessi identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ (usando il modulo $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Notazione

$R > 0$. Consideriamo il disco *aperto* di centro z_0 e raggio R:

$$B(R) = B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

e il corrispondente disco *chiuso*

$$\bar{B}(R) = \bar{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Raggio di convergenza

Definizione

Dati (a_n) in $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ poniamo:

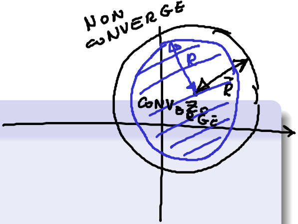
$$M := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\sim \text{limite})$$

(per esempio supponiamo che esista il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ e chiamiamolo M). In generale $M \in [0, +\infty]$.

Il *raggio di convergenza della serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ è per definizione il numero :

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } M = 0, \\ \dfrac{1}{M} & \text{se } M \in]0, \infty[, \\ 0 & \text{se } M = +\infty. \end{cases}$$

Convergenza delle serie di potenze



Teorema

Siano (a_n) una succesione in $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
Sia $\bar{R}$ il raggio di convergenza della serie. Allora:

1. *per ogni R con $0 < R < \bar{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente su $\bar{B}(R)$; in particolare per ogni z in $B(\bar{R})$ la serie converge puntualmente in z;*
2. *per ogni z fuori da $\bar{B}(\bar{R})$ la serie non converge in z.*

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda sulla "buccia" $S(\bar{R}) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \bar{R}\}$.

Ovviamente se $\bar{R} = 0$ la serie non converge mai, eccetto che per $z = z_0$.
Risulta quindi definita la funzione $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ per z nel disco aperto $B(z_0, \bar{R})$. Tale disco si dice *disco di convergenza* della serie.

qui ho la conv. puntuale

Dim. $\sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{a_m z^m}_{f_m(z)}$ ($z_0 = 0$, se $z_0 \neq 0$ faccio una traslazione ...)

① Fisso $R < \bar{R}$. Calcoliamo $\|f_m\|_{\infty, \bar{B}(0,R)}$

$$= \max_{|z| \leq R} |a_m z^m| = \max_{|z| \leq R} |a_m| |z|^m \leq |a_m| R^m$$

Vediamo se $\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{\infty, \bar{B}(0,R)} < +\infty$ (vediamo se c'è la conv. totale) ⊛

$\mapsto$ se $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| R^m < +\infty$ Applico il criterio della radice:

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m| R^m} = R \lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \frac{R}{\bar{R}} < 1 \Rightarrow \text{la serie ⊛ conv.}$$

$\Rightarrow$ (teoremi visti) $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ $\boxed{\text{conv. unif. su } \bar{B}(0,R)}$

② Sia z con $|z| > \bar{R}$. Allora $\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m z^m|} = \ldots = \frac{|z|}{\bar{R}} > 1$

$\Rightarrow |a_m z^m| \to +\infty \Rightarrow$ La serie $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ NON PUÒ CONVERGERE

Derivabilità delle serie di potenze

Teorema

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}$$

La funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

è (ben definita) continua e infinitamente derivabile nel disco aperto $B(\bar{R})$, dove $\bar{R}$ è il raggio di convergenza della serie. Inoltre dato h intero la derivata h-esima di f è data dalla serie (delle derivate termine a termine)

$$f^{(h)}(z) = \sum_{n=h}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}_{h \text{ fattori}} (z-z_0)^{n-h} \tag{1}$$

*che risulta avere lo **stesso raggio** di convergenza della serie di partenza.*

Per la verità non sappiamo ancora cosa è la derivata di $f(z)$ (funzione di variabile complessa) - la formula sopra è sicuramente valida se gli a_n, z_0 sono reali e ci si limita a prendere z reale. Vedremo poi che la cosa si generalizza.

Dim. Caso $h=1$, $z_0=0$ $z=x\in\mathbb{R}$, $a_n\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ VOGLIO DIM. CHE

$\exists\, f'(x)$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ $\forall x$ con $|x|<\bar{R}$ (= raggio)

USIAMO: se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$, $f'_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} g$ $\Rightarrow$ f è der. $f'=g$.

QUINDI: Basta verificare che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ è conv. su $\overline{B(0,R)}$ $\forall R<\bar{R}$ $\Leftarrow$ raggio di conv. di $\circledast$ è anche lui uguale a $\bar{R}$. Tale raggio si trova calcolando

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \underset{(\dots)}{=} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1}\cdot\underbrace{\lim\sqrt[n]{a_n}}_{\frac{1}{\bar{R}}} = \frac{1}{\bar{R}}$$

VIENE

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n\right)$$

ITERANDO IL RAGIONAMENTO TROVO LA FORMULA $\forall h\in\mathbb{N}$

Osservazione

Se mettiamo $x = x_0$ nella formula (1), otteniamo:

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

cioè f (in $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$) *è eguale alla sua serie di Taylor*.

In generale l'affermazione sopra **non vale** per una funzione generica f di classe $\mathscr{C}^\infty$ (che non sia ottenuta come una serie di potenze) → CONTROSEMPIO.

Proposizione

Supponiamo che $f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ *sia di classe* $\mathscr{C}^\infty$ *e supponiamo che esista una costante* K *tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \le K^n \qquad \text{per tutte le } x \text{ in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

Allora

(si fa come per e^x usando il resto di Lagrange)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{in }]x_0 - r, x_0 + r[$$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty} a_n\, n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

Metto $z=z_0$ tutti i termini diventano nulli tranne quello con $n=k$ $\left[(z-z_0)^0=1\right]$. $\Longrightarrow$ TROVO

$$f^{(k)}(z_0)=a_k\,k(k-1)\cdots 1 = a_k\,k!$$

CIOÈ: – SE $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\Longrightarrow$ $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

DATI a_n

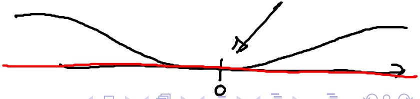
in altri termini gli a_n sono i coefficienti di Taylor di f

$\Rightarrow$ Se f è somma di una serie di potenze, allora f è somma della sua "serie di Taylor"

IN GENERALE NON È DETTO CHE UNA f ($f\in C^\infty$) sia somma della sua serie di Taylor: per esempio

$f^{(k)}(0)=0\ \forall k$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$



$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(2x^{-3}\right) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\ ;\quad \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \quad \left(\text{VINCE } e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$\vdots$

si può fare il calcolo per le derivate successive

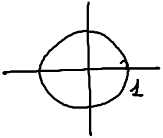
$$f^{(k)}(x) = \frac{\left(e^{-1/x^2}\right)(\text{polinomio in } x)}{\text{polinomio in } x} \longrightarrow 0 \quad \text{se } x \to 0$$

$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se faccio la serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Trovo zero - MA $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$

· Esempio $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (a_n = 1 \ \forall n)$



$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1} \longrightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{R} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

È DEFINITA su $\{z : |z|<1\}$

NON È DEFINITA SE $|z|>1$

Se $|z| = 1$ $\boxed{??}$ (per es. se $z=1$ $\Rightarrow$ la serie diverge)

IN REALTÀ SAPPIAMO CHI È $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

$$\frac{(1+z+z^2+\dots+z^n)(1-z)}{1-z} = \frac{(1+\cancel{z}+\cancel{\dots}+\cancel{z^n}) - (\cancel{z}+\cancel{z^2}+\cancel{\dots}+z^{n+1})}{1-z}$$

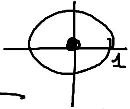
$$= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \longrightarrow \frac{1}{1-z}$$

se $\underline{\underline{|z|<1}}$ $(\Rightarrow |z|^{n+1} \to 0)$

(SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE z)

Esempio $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \qquad a_n = n$

$\sqrt[n]{n} \to 1$ (fatto noto) $\Rightarrow \bar{R} = 1$



$f(z)$ è sicuramente continua su ogni $\overline{B(0,R)}$ (chiusa) per $0<R<1$.

$\Rightarrow f$ è continua su $B(0,1)$ (aperto)

NOTIAMO CHE, se $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\Rightarrow$

$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$; MOLTIPLICO PER X

$x\, g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \leftarrow f(x)$

QUINDI $\quad \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$!!! (ammesso che tutto funzioni anche se $z \in \mathbb{C}$)

$|z|<1$

Per es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$

Esempio (negativo) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ $\quad \bar{R} = 0$

Dato che $\sqrt[n]{n!} = +\infty$; DISCO DI CONV. $= \emptyset$.

Osservazione $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$

(appena visto). Noto che $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

Per altro $\dfrac{1}{1-z}$ esiste $\forall z \neq 1$, mentre la serie converge solo

se $|z| < 1$ (qualche dubbio sugli z di modulo 1)

L'idea è che $\bar{R}$ è il "massimo cerchio" che posso prendere

prima di incontrare una "singolarità". OK in $\mathbb{C}$

Altro esempio $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

deve essere $a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ (-1)^n & \text{se } k = 2n \end{cases} = 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

$|a_k| = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1$ sui pari $\sqrt[2k]{a_{2k}} = \sqrt[2k]{1} \to 1$

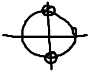
e in generale $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \Rightarrow \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$

DUNQUE, SE LA GUARDO IN $\mathbb{R}$, CONVERGE PER $-1 < x < 1$

Peraltro $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \dfrac{1}{1+x^2}$

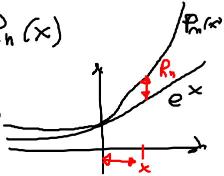
COME MAI?

Se la guardo in $\mathbb{C}$ vedo che $\dfrac{1}{1+z^2}$ ha due singolarità in $\pm i$ $(|i|=1)$



- e^x $x \in \mathbb{R}$ considero lo sviluppo di Taylor

in $x_0 = 0$. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$



- valutazione di Peano $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ per $x \to 0$

R_n è "infinitesimo di ordine superiore a x^n"
(NON MI SERVE)

- Valutazione di Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ $(0 < \xi < x)$

dunque ($f^{(n)}(x) = e^x$)

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\xi = \xi_{x,n}$ è tra 0 e x

$$|R_n(x)| \le \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

(il fattoriale $(n+1)!$ tende all'infinito più velocemente di x^{n+1})

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con l'opportuna def. $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos(b)+i\sin(b))$

la formula vale $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \qquad \forall z \in \mathbb{C} = B(0,\infty) \qquad (\text{Cesaro})$$

NOTA $\quad a_n = \frac{1}{n!} \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \bar{R} = \infty$

Notiamo anche che $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = f(z)$$

$(m = n-1)$

$$\boxed{\frac{d}{dz} e^z = e^z}$$

Nello stesso modo usato per e^x si vede che

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Es. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = f(z)$ $\quad \bar{R} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n+1}} = 1$

Derivo $f(x) \longrightarrow f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

$= \dfrac{1}{1-x}$ . . Dunque f è una primitiva di $\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

cioè $-\ln(1-x) + c$. chi è c? . Metto $x=0$

$0 = f(0) = c$. $\Rightarrow f(x) = -\ln(1-x)$. Se cambio x in $-x$

$$\ln(1+x) = -\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$