Complementi di Matematica
Terza lezione
(riassunto “postumo”)

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

8 ottobre 2009

Definizione

Un insieme $\mathbb{X}$ si dice uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (rispettivamente su $\mathbb{C}$) se per ogni x_1 e x_2 in $\mathbb{X}$ risulta definita in $\mathbb{X}$ la *somma* $x_1 + x_2$ dei due *vettori* x_1 e x_2, per ogni x in $\mathbb{X}$ e ogni c in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) risulta definito cx in $\mathbb{X}$, detto *prodotto* del vettore x per lo *scalare* c, di modo che le due operazioni così introdotte verificano le usuali proprietà: [a]

---

[a] tali proprietà sono

la commutativa: per ogni x_1 e x_2 in $\mathbb{X}$ $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$;

l'associativa: per ogni x_1, x_2 e x_3 in $\mathbb{X}$ $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$;

l'esistenza dell'elemento neutro: esiste $\mathbf{0}$ tale che per ogni x in $\mathbb{X}$ $x + \mathbf{0} = x$;

l'esistenza dell'opposto: per ogni x in $\mathbb{X}$ esiste $-x$ in $\mathbb{X}$ per cui $x + (-x) = \mathbf{0}$;

la distributiva: per ogni c in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) e ogni x_1, x_2 in $\mathbb{X}$ $c(x_1 + x_2) = cx_1 + cx_2$;

la neutralità di 1: per ogni x in $\mathbb{X}$ $1x = x$

Definizione

Dati $x_1, \dots, x_n$ in $\mathbb{X}$ si chiamia *combinazione lineare* di $x_1, \dots, x_n$ un'espressione del tipo $c_1 x_1 + \cdots + c_N x_n$ dove i *coefficienti* $c_1, \dots, c_N$ sono in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Si dice che $x_1, \dots, x_n$ sono *linearmente dipendenti* se esiste una combinazione lineare nulla fatta con dei coefficienti non identicamente nulli (cioè se $\exists (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ tali che $c_1 x_1 + \cdots + c_N x_n = 0$). Si dice che $x_1, \dots, x_n$ sono *linearmente indipendenti* se ciò non è vero, cioè se ogni combinazione lineare nulla deve avere tutti i coefficienti eguali a zero.
Si dice che $x_1, \dots, x_n$ è una base per $\mathbb{X}$ se $x_1, \dots, x_n$ sono linermente indipendenti e *generano* $\mathbb{X}$; con quest'ultima espressione intendiamo che ogni x di $\mathbb{X}$ si può scrivere come combinazione lineare di $x_1, \dots, x_n$, in altri termini $x = c_1 x_1 + \cdots + c_N x_N$ per opportuni $c_1, \dots, c_N$.

Definizione

Diciamo che $\mathbb{X}$ ha dimensione N se esiste una base per $\mathbb{X}$ fatta di N vettori.
Diciamo che $\mathbb{X}$ ha dimensione infinita se ciò non è vero per nessun N, cioè se non è possile trovare una base formata da un numero finito di vettori di $\mathbb{X}$.

Esempio

- Lo spazio $\mathbb{R}^N$ ha dimensione N rispetto a $\mathbb{R}$;
- Lo spazio $\mathbb{C}^N$ ha dimensione $2N$ rispetto a $\mathbb{R}$;
- Lo spazio $\mathbb{C}^N$ ha dimensione N rispetto a $\mathbb{C}$.

Definizione

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ indichiamo con $\mathscr{C}^0(A;\mathbb{R}^M)$ lo spazio

$$\mathscr{C}^0(A;\mathbb{R}^M := \left\{f : A \to \mathbb{R}^M : f \text{ è una funziona continua}\right\}$$

Se $M = 1$ scriviamo $\mathscr{C}^0(A)$ invece di $\mathscr{C}^0(A;\mathbb{R})$.

$\mathscr{C}^0(A;\mathbb{R}^M)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Chiameremo *norma* in $\mathbb{X}$ una applicazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{R}$ con le proprietà seguenti: se indichiamo con $\|x\|$ la norma del vettore x, allora deve essere

1. $\|x\| \geq 0$ per ogni x e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. $\|cx\| = |c|\|x\|$ per ogni vettore x e ogni scalare c;
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni coppia di vettori x e y.

Se in $\mathbb{X}$ è definita una norma si dice che $\mathbb{X}$ è una *spazio normato*. A volte, quando sia necessario distinguere tra norme in spazi diversi, indicheremo la norma di un vettore x di $\mathbb{X}$ con $\|x\|_{\mathbb{X}}$.
Notiamo che la seconda proprietà implica $\|-x\| = \|x\|$.

Gli spazi $\mathbb{R}^N$ sono normati mediante la norma

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$$

detta anche *norma euclidea*. Si può in realtà mettere anche altre norme su $\mathbb{R}^N$. Poniamo

$$|\mathbf{x}|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|;$$
$$|\mathbf{x}|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

e per congruità indichiamo la norma euclidea con $|\mathbf{x}|_2$.
Si verifica che tutte le funzioni sopra sono delle norme. Si vede anche che

$$|\mathbf{x}|_\infty \leq |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}|_1 \leq N|\mathbf{x}|_\infty. \tag{1}$$

Definizione (Limite in uno spazio normato)

Data una successione (a_n) di punti di $\mathbb{X}$ e dato l in $\mathbb{X}$ diremo che l è il limite di (a_n) per n che tende all'infinito (o anche che (a_n) tende ad l) se

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - l\| = 0$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

o anche in modo più conciso , $a_n \to a$ ($n \to +\infty$ viene sottinteso).

È immediato constatare che la convergenza $\mathbb{R}^N$ corrisponde al caso di $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|_2$. Peraltro a causa delle disuguaglianze (1) la convergenza rispetto a una qualunque delle tre norme introdotte su $\mathbb{R}^N$ è la stessa; come si usa dire:

Le norme $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ e $|\cdot|_\infty$ sono tra loro *equivalenti*.

Definizione (Spazi $\mathscr{C}^0$)

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ un sottoinsieme compatto. Allora la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,A} = \max_{x\in A} |f(x)|$$

esiste finita per ogni $f \in \mathscr{C}^0(A), \mathbb{R}^M$ (a causa del teorema di Weierstrass). Non è difficile verificare che $\|\cdot\|_\infty$ verifica le proprietà della norma e che la convergenza introdotta con tale norma corrisponde alla convergenza uniforme.

Definizione

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale normato e sia $\|\cdot\|$ la norma. Si dice che una successione (a_n) di punti di $\mathbb{X}$ verifica la proprietà di Cauchy (brevemente (a_n) è di Cauchy) se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|a_n - a_m\| \leq \varepsilon.$$

È un fatto noto che gli spazi $\mathbb{R}^N$ sono completi.

Definizione

Uno spazio vettoriale normato $\mathbb{X}$ di dice *completo* se ogni successione di Cauchy ammette limite.

Teorema

Se A è compatto, lo spazio $\mathscr{C}^0(A;\mathbb{R}^M)$ è completo

DIM. (vedi dispensa)

Come fatto nel caso di $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ si può definire una serie in $\mathbb{X}$ mediante il limite delle somme parziali:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

Definizione

Diciamo che una serie nelo spazio normato $\mathbb{X}$ è *assolutamente convergente* se è convergente la serie numerica (a termini positivi)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|a_n\|$$

Teorema (Convergenza assoluta e convergenza)

Se lo spazio normato $\mathbb{X}$ è completo allora ogni serie assolutamente convergente risulta essere convergente.

DIM. (vedi dispensa)

Osservazione

Il teorema precedente, unitamente alla completezza di $\mathscr{C}^0$ dimostra dunque che una serie totalmente convergente è uniformemente convegente.