.

COMPLEMENTI DI MATEMATICA [1]
PRIMA E SECONDA LEZIONE

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Argomenti del corso

- **Serie di Fourier**
- **Trasformata di Fourier**
- **Trasformata di Laplace**
- Cenni alle **distribuzioni** (solo energetici)

Gli strumenti indicati sopra trovano applicazione (per esempio) per:

- Soluzione di **equazioni differenziali** (ordinarie o alle derivate parziali) con **dati al contorno**

Alcuni prerequisiti da introdurre

- Nozioni di **convergenza per successioni di funzioni** (idea di “approssimazione”)
- Teoria delle **funzioni di variabile complessa** (interessante di per sé e utile per fare i calcoli)

Convergenza puntuale e uniforme per successioni di funzioni

$A \subset \mathbb{R}^N$, per ogni intero n sia $f_n : A \to \mathbb{R}^M$(pensare a $N = M = 1$).
Diciamo che $(f_n)_n$ è una successione di funzioni da A in $\mathbb{R}^M$.

Definizione

$(f_n)_n$ *converge puntualmente* in $x_0 \in A$ se esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
$(f_n)_n$ *converge puntualmente su* A se $(f_n)_n$ converge puntualmente in ogni x_0 di A. In questo caso esiste la funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ definita da

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

e scriviamo $f_n \xrightarrow{punct} f$ (f_n tende puntualmente a f).

Definizione

Data la succ. di funz. $(f_n)_n$ e una funz. $f : A \to \mathbb{R}^M$ diciamo che $(f_n)_n$ converge *uniformemente su A* a f se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Scriveremo $f_n \xrightarrow{unif} f$ (su A) (f_n converge uniformemente a f).
Notiamo che la convergenza uniforme **dipende anche dall'insieme** A

Proposizione

Se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su A, allora $(f_n)_n$ converge puntualmente su A.

Teorema

Siano $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *e supponiamo che* $f_n \longrightarrow f$ *uniformente in* A. *Sia* x_0 *un punto di accumulazione per* A *e supponiamo che per ogni* n *esista* $\lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x)$ *che indichiamo con* l_n. *Allora*

1. *esiste* $l = \lim_{n \longrightarrow \infty} l_n$;
2. *si ha che* $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

In sostanza si può dire che

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x)$$

La convergenza uniforme – a differenza di quella puntuale – permette di scambiare i limiti

Teorema

Siano (f_n) *ed* f *tali che* $f_n \xrightarrow{unif} f$ *su* A, *supponiamo che le* f_n *e la* f *siano integrabili su* A *e che la misura (o volume) di* A *(che indichiamo con* $|A|$*) sia finita. Allora*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

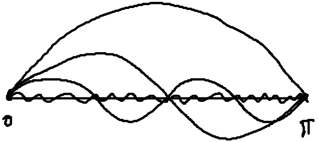
La convergenza uniforme – a differenza di quella puntuale – permette di scambiare limite e integrale.

· Convergenze (puntuale / uniforme) e derivata ?

IN GENERALE LE COSE VANNO MALE !

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

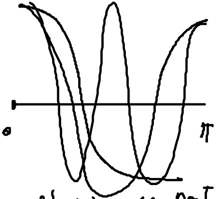
su $[0,\pi]$



$$\max_{0\le x\le\pi} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0 \qquad (f(x)=0\ \ \forall x)$$

Però $$f_n'(x) = \frac{\cancel{n}\cos(nx)}{\cancel{n}} = \cos(nx)$$

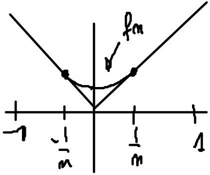
$$\max_{0\le x\le\pi} |f_n'(x)| = 1 \Rightarrow \underbrace{f_n' \xrightarrow{\text{UNIF}} 0}_{\text{NO}}$$



SI POTREBBE VEDERE CHE x fissato $\nexists \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ (a parte qualche x)

Altro esempio

$f(x) = |x| \quad -1 \leq x \leq 1$



Dato n definisco $f_n(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) = |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

f_n ha derivata continua

$a x^2 + b$ IN MODO CHE $a\left(\frac{1}{n}\right)^2 + b = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + b = \frac{1}{n}$

$2a\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{n}{2}$

$b = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$

$f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \quad \left(\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0\right)$

PERÒ f NON È DERIVABILE

$f_n' \to$ puntualmente

Teorema

Supponiamo che I sia un intervallo in $\mathbb{R}$ e che $f_n : I \to \mathbb{R}$ sia una successione di funzioni derivabili su I con derivata f_n' continua su I. Supponiamo che ci siano due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ per cui:

$$f_n \to f \quad \textit{puntualmente} \qquad f_n' \to g \quad \textit{uniformemente}$$

(ne segue che g è continua). Allora f è derivabile e $f' = g$.

La convergenza uniforme non permette in generale lo scambio tra limite e derivata. Ciò diventa possibile aggiungendo l'ipotesi che anche le derivate convergano uniformemente.

Definizione (Norma uniforme)

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ definiamo

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

Allora per una successione $(f_n)_n$ di funzioni su A vale

$$f_n \xrightarrow{unif} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{\infty,A} \to 0$$

Può essere $\|f\|_\infty = \infty$ (però se $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ prima o poi $\|f_n - f\|_\infty < +\infty$).
Peraltro se f è continua e A e' limitato e chiuso, allora (Weierstrass)

$$\|f\|_{\infty,A} = \max_{x \in A} |f(x)|.$$

La norma uniforme introduce una nozione di distanza tra due funzioni.

Richiamo sulle serie numeriche

Definizione

$(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$, chiamiamo *somma parziale* n-esima l'espressione

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

La successione $(S_n)_n$ si chiama *serie* associata ad $(a_n)_n$ (o serie degli a_n).
Si dice che la serie è

convergente se $(S_n)_{n \geq n_0}$ ammette limite;

divergente se $(S_n)_{n \geq n_0}$ tende a $\pm\infty$;

indeterminata se $(S_n)_{n \geq n_0}$ non ammette limite.

Se limite di $(S_n)_n$ esiste lo chiamiamo *somma della serie* e lo indichiamo con $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Spesso, con un leggero abuso, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ si usa anche per indicare la serie oltre che la sua somma.

Proposizione

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge, allora* $a_n \to 0$.

Proposizione

Se una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *ha tutti termini positivi* ($a_n \geq 0$) *allora non può essere indeterminata.*

Il risultato sopra ci autorizza a considerare **sempre** la somma di una serie a termini positivi: **se** $a_n \geq 0$, per dire che la serie degli a_n è convergente basta scrivere $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Proposizione (criterio del confronto)

$(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ successioni di numeri positivi:$a_n \geq 0, b_n \geq 0$.
Se $a_n \leq b_n$ per ogni n (per ogni n grande), allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{diverge}$$

Proposizione (criterio del confronto asintotico)

$(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *successioni di numeri positivi e supponiamo che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Allora, se $l \in]0, +\infty[$*:*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge},$$

se $l = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

mentre se $l = +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge}.$$

Proposizione (criterio della radice)

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri positivi. Allora

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}.$$

Proposizione (criterio del rapporto)

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri positivi. Allora

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}.$$

Definizione

$(a_n)_n$ una successione. Diciamo che la serie degli a_n è assolutamente convergente se la serie dei $|a_n|$ è convergente, cioè se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Nota che $|a_n| \geq 0$!

Proposizione (criterio della convergenza assoluta)

Se una serie converge assolutamente essa converge. In altri termini, data una successione $(a_n)_n$ si ha

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Alcune serie importanti

Proposizione

La ***serie geometrica*** *di ragione A:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

- *è convergente per* $|A| < 1$ *e in tal caso ha come somma* $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-A}$;
- *è divergente positivamente per* $A \geq 1$;
- *è indeterminata per* $A \leq -1$.

Proposizione

La ***serie armonica*** *di esponente* α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- *è convergente se* $\alpha > 1$;
- *è divergente positivamente se* $\alpha \leq 1$.

Teorema (prodotto alla Cauchy di due serie)

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *due serie assolutamente convergenti. Poniamo:*

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

(qui gli indici partono da 1 - non cambiamenti)

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *è assolutamente convergente e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serie ass. conv. (per es. $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ e convergenti)

Cosa è la "serie prodotto" ??

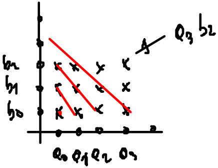
se fossero somme finite $(a_0+a_1+\dots+a_n)(b_0+\dots+b_n)$

$\neq \cancel{a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}$

=

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

SERIE PRODOTTO



$a_0 b_0 = c_0$

$a_1 b_0 + a_0 b_1 = c_1$

$a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = c_2$

$\vdots$

Con le stesse definizioni si puossono definire le serie di punti di $\mathbb{R}^N$:

$$a_n \in \mathbb{R}^N, \qquad S_k := \sum_{n=0}^{k} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} S_k \text{ se esiste}$$

Naturamente se $(a_n)_n$ e' in $\mathbb{R}^N$ **non ha più senso** parlare di serie a termini positivi.

Dovendo studiare la convergenza di una serie vettoriale si può

- studiarla componente per componente – riducendosi a studiare N serie reali;
- studiare $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ – **continua a valere** infatti il criterio della convergenza assoluta:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

La validità del criterio di convergenza assoluta è legata alla proprietà di **completezza di $\mathbb{R}^N$**.

Successioni di Cauchy e completezza

Definizione

Si dice che una successione $(a_n)_n$ *verifica la proprietà di Cauchy* ($(a_n)_n$ è di Cauchy) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}$$

(gli a_k "diventano arbitrariamente vicini tra loro al crescere dell'indice").

Teorema

Data una successione $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}^N$ si ha:

$$(a_n)_n \textit{ ammette limite} \Leftrightarrow (a_n)_n \textit{ è di Cauchy}$$

Il teorema sopra si esprime solitamente dicendo

Lo spazio $\mathbb{R}^N$ e'**completo**.

Facciamo vedere che $\sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n$ converge

<u>Dim</u> Poniamo $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$, $\sigma_m = \sum_{k=0}^{m} |a_k|$

$(s_m \in \mathbb{R}^N, \; \sigma_m \in \mathbb{R}$ con $\sigma_m \geq 0)$.

$\sum_n a_n$ conv. $\Leftrightarrow s_n$ ha limite / $\sum_n |a_n|$ conv. $\Leftrightarrow \sigma_n$ ha limite

So che σ_m ha limite $\Rightarrow$ so che σ_m è di Cauchy:

DIMOSTRO CHE s_m è di Cauchy; infatti dato $\varepsilon > 0$ prendo $\bar{m}$

(quello di σ_m) : $\forall m, \underset{m \geq m}{m \geq \bar{m}}$ $|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{m} |a_k| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$. Passiamo a s_m: se $n \geq m \geq \bar{m}$ (lo stesso $\bar{m}$)

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

COMPLETEZZA

$\Rightarrow$ HO DIM. CHE s_m è di Cauchy $\Rightarrow$ s_m converge

Serie di funzioni

Definizione

Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$. Per $n \in \mathbb{N}$ la somma parziale n-esima relativa a $(f_n)_n$ è la funzione $F_n : A \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_n(x) \quad = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

Chiamiamo *serie* di funzioni associata a $(f_n)_n$ la successione $(F_n)_n$.
Diciamo che la serie delle f_n *converge puntualmente su A* se per ogni x di A la serie (vettoriale) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ risulta convergente. In questo caso chiamiamo *somma* della serie la funzione $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ definita da

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Definizione

Siano $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$. Diciamo che la serie delle funzioni f_n è *uniformemente convergente* se la successione delle somme parziali $(F_n)_n$ è uniformemente convergente.

Questo significa che:

- La serie (vettoriale) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ risulta convergente per ogni x di A, definendo così una somma

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x);$$

- le somme parziali F_n convergono uniformemente alla somma F.

Convergenza totale

Teorema (tip. convergenza assoluta)

Sia (f_n) una successione di funzioni limitate su A. Se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ è convergente, allora la serie delle f_n converge uniformemente su A ad una funzione somma limitata.

Osservazione

La proprietà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$$

viene anche chiamata *convergenza totale* della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Il teorema precedente afferma quindi che una serie di funzioni limitate che sia totalmente convergente è uniformemente convergente.

Osservazione

È chiaro che la definizione di convergenza uniforme per le serie e' un caso particolare della convergenza uniforme di funzioni e quindi tutti i risultati già detti rimangono validi.

Poniamo d'ora in poi

$$\mathscr{C}^0(A) = \{F : A \to \mathbb{R}^M, f \text{ continua}\}$$

Ricordiamo anche che un insieme A è compatto se è limitato e chiuso e che in tal caso vale il teorema di Weierstrass per cui ogni funzione continua su A ammette massimo e minimo.

Corollario

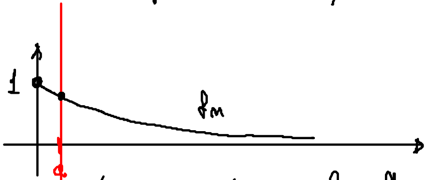
Sia (f_n) *una successione di funzioni in* $\mathscr{C}^0(A)$, *con* A *compatto e supponiamo che la serie numerica* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in A} |f_n(x)|$ *sia convergente. Allora*

1. $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *è una funzione continua.* $\left(\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$
2. *Si ha*
$$\int_A F(x)\,dx = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$
3. *Se* $A = I$ *è un intervallo, se le* f_n *sono tutte derivabili con derivata continua e se anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in A} |f_n'(x)|$ *è convergente allora* F *è derivabile e si ha*
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \text{ in } I.$$

Esempi (1) $f_n(x) = e^{-nx}$ su $[0,+\infty[$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = F(x)} \qquad \left(F(0) = +\infty \; !! \right)$$

Dove è definita $F(x)$, è continua?, derivabile? ...



$\|f_n\|_\infty = 1$ (se $A = [0,+\infty[$)

$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \Rightarrow$ NIENTE CONV. TOTALE

(la conv. totale è solo sufficiente)

POTREBBE ANCHE CONV. UNIF. MA IN REALTÀ NO – Se $\sum f_n$ converge unif $\Rightarrow$ $\|f_n\|_\infty \to 0$ questo non vale in questo caso

DEVO STUDIARE LA SERIE SU UN INTERVALLO PIÙ PICCOLO!

Fisso $a>0$ e mi metto su $[a,+\infty[= A$.

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = e^{-na}.$$

Provo la conv. totale: $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^a}\right)^n < +\infty$

$\frac{1}{e^a} < 1$

O.K. CONSEGUENZE

$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ è una funzione continua su $[a,+\infty[$

Domanda $F'(x)$ esiste? La risposta è SÌ se si dimostra che

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,A} < +\infty$. Vediamo: $f_n'(x) = -n e^{-nx} \Rightarrow$

$$\|f_n'\|_{\infty,A} = \sup_{x \geq a} |-n e^{-nx}| = n e^{-na}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,A} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-na} < +\infty \quad \left(\text{criterio del rapporto} \quad \frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{n e^{-na}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{e^a} \to \frac{1}{e^a} < 1 \right)$$

Dunque $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ è derivabile $\forall x \geq a$ e

$$\left.\begin{aligned} &F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} -n\, e^{-nx} \\ &\text{Iterando } F \text{ ha derivata } k\text{-esima } \forall k \quad F^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^k e^{-nx} \end{aligned}\right\} \circledast$$

Dato che $a>0$ è arbitrario le proprietà $\circledast$ valgono su $]0,+\infty[$

ATTENZIONE non si può ragionare direttamente su $]0,+\infty[$

IN REALTÀ $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n-1$

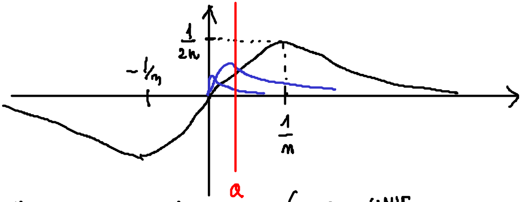
$$=\frac{1}{1-e^{-x}}-1=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$ (tende a $+\infty$ se $x\to 0^+$)

Esempio 2 $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ su $\mathbb{R}$

Facciamoci un'idea di come sono fatte le $f_n \to$ STUDIO DI FUNZ.

$\lim_{x\to+\infty,\,-\infty} f_n(x) = 0$ — f DISPARI $\quad f_n(0)=0$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}. \quad f_n'(x)=0 \iff x = \pm\frac{1}{n}$$



$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n^2(1/n)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

$\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2n}$ $\quad \left(f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0 \text{ su } \mathbb{R} \right).$

Studio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Conv. totale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$ (NON A CASO NULLA!!)

ALLONTANIAMOCI DA ZERO! Fisso $a>0$ e $A=[a,+\infty[$

$\|f_n\|_{\infty,A} = f_n(a)$ se $n \geq \frac{1}{a}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{1+n^2a^2} \simeq \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{l} a_n \simeq b_n = \frac{1}{a n^2} \quad \text{perché} \\ \frac{a_n}{b_n} \to 1 \end{array} \right) < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. TOT. su $[a,+\infty[$ $\Rightarrow$

$F(x) = \sum \frac{x}{1+n^2x^2}$ è una funz. continua su $[a,+\infty[$ $\Rightarrow$ su $]0,+\infty[$

- Si potrebbe dim. che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,A} < +\infty \Rightarrow F$ è derivabile e $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ (per esercizio ...)
- Lo stesso si dimostra su $]-\infty,-a] \Rightarrow$ su $]-\infty,0[$
- Cosa succede in $x=0$?? (Noto che $F(0)=0$)

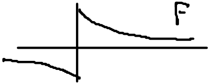
· Sospetto: $\lim_{x \to 0^+} F(x) > 0$ (se è così $\sum_{1}^{\infty} f_n$ NON CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$)

In effetti è così. Infatti prendiamo $n \in \mathbb{N}$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1/m}{1+\frac{n^2}{m^2}} \geq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\cancel{m}} \frac{m^{\cancel{2}}}{m^2+n^2} \geq \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \implies \lim_{x \to 0^+} F(x) \geq \frac{1}{2} \neq 0$$

Dunque $\sim$



Si può fare un calcolo migliore. Ricordiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_{1}^{+\infty} s(x)\,dx$$

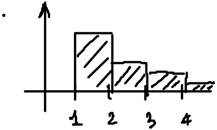
dove $s(x)$ "funzione a scalini"

$s(x) = a_1 \quad 1 \leq x < 2$

$s(x) = a_2 \quad 2 \leq x < 3$

$s(x) = a_3 \quad 3 \leq x < 4 \quad \ldots$

$s(x) = a_n$ se $n \leq x < n+1$



$$x-1 < [x] \le x$$

$$\boxed{s(x) = a_{[x]}}$$

Torniamo a $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+n^2x^2}}_{a_n} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy$$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy} \le \underset{\substack{\| \\ F(x)}}{\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy} \le \underset{\substack{\| \\ 2}}{\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+(y-1)^2x^2}\,dx}$$

$$1 = \quad xy = t \qquad dy = \frac{dt}{x}$$

$$1 = \int_x^{+\infty} \frac{\cancel{x}}{1+t^2}\,\frac{dt}{\cancel{x}} = \Big[\operatorname{arctg}(t)\Big]_x^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$$

② $t=(y-1)x \qquad y=\frac{t}{x}+1 \qquad dy=\frac{dt}{x}$

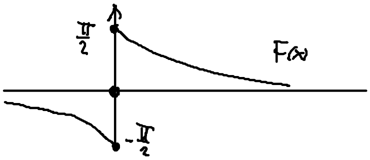
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cancel{x}}{1+t^2}\,\frac{dt}{\cancel{x}} = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

DUNQUE $(x>0)$

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x) \le F(x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} F(x)=\frac{\pi}{2}}$$

tutte le dis. di prima dipendono da $x>0$ –

Se $x<0$ si scambia tutto!!



· Impostazione generale "astratto"

· $\mathbb{X}$ spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$)
$$\underbrace{\text{su } \mathbb{R} \text{ o su } \mathbb{C}}_{\text{scalari}}$$

$x \in \mathbb{X}$ oggetti (vettori) che si possono sommare tra loro e si possono moltiplicare per gli scalari

$$x, y \in \mathbb{X} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C} \quad \to \quad \alpha x + \beta y \in \mathbb{X}$$

· $x_1 \dots x_n$ in $\mathbb{X}$ è linearmente indipendente se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}/\mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

- $\mathbb{X}$ ha dimensione N se esistono N vettori linearmente indipendenti e se prendo $M+1$ vett. $\Rightarrow$ sono linearmente dip.

Tali vett. (indipendenti) formano "una base" cioè un insieme $e_1 \dots e_N$ tale che per ogni x esistono unici $\alpha_1 \dots \alpha_N$ tali che $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_N e_N$

- Se $\mathbb{X}$ ha dimensione N "MORALMENTE" $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N / \mathbb{C}^N$

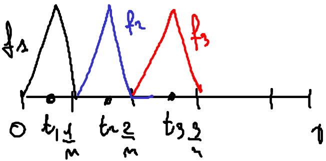
- <u>Esempio</u> $\mathbb{X} = \{\text{funzioni } f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continue}\} = C^0([0,1])$

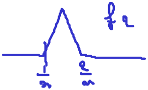
è uno spazio vettoriale reale (complesso se metto $\mathbb{C}$)

INFATTI $f, g \in C^0([0,1])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^0(-)$

$\mathbb{X}$ NON HA DIMENSIONE FINITA

· Dato un qualunque numero n trovo n funzioni linearmente indipendenti. Divido $[0,1]$ in n sottointervalli e definisco f_n come nel disegno





Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$

Questo vuol dire che la funzione

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$ per ogni x

$\Rightarrow f(t_1) = 0$ MA $f(t_1) = \alpha_1 f_1(t_1)$

(tutte le $f_2 \dots f_n$ sono zero in t_1) $\Rightarrow \alpha_1 = 0$

Analogamente $0 = f(t_2) = \alpha_2 f_2(t_2) \Rightarrow \alpha_2 = 0$

. . . . .

tutti gli α_i sono zero $\Rightarrow$ f_i INDIP.