Claudio Saccon (*)

Corso di Laurea in Matematica

Lezioni di Analisi Convessa

Lezione 22 20/05/21

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare (anche per email)

<u>Commento</u> $G(x,s)$ è un integrando se

(a) $G(\cdot, s)$ è misurabile $\forall s \in \mathbb{R}^n$

G è di Carathéodory se G è un integrando continuo

[G è un integrando normale : basta dire
(b) $G(x, \cdot)$ è s.c.i q.o. x
(c) $\exists\, \tilde{G}$ boreliano con $G(x,\cdot) = \tilde{G}(x,\cdot)$ q.o. x]

non si vede la (a). Se 1 quando caso è stato dim. $\Rightarrow$

NON SERVE (a) nella dim.

(b) (c) $\Rightarrow$ $\forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ misurabile $G(\cdot, u)$ è misurabile

In particolare vale (a)!

Dato G int. normale $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G : L^p \to [-\infty, +\infty]$

$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega G(x, u)\, dx \quad \text{(opportunamente precisato !}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{ u : G(\cdot, u) \in L^1 \}$$

<u>Teor.</u> G int. normale convesso. Se $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$.

Prop. Siano $u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})^{\subset \mathbb{L}_1}$ e $u_2 \in \mathbb{L}_2$. Allora

$$u_2 \in \partial \mathcal{G}(u_1) \iff u_2(x) \in \partial G(x, u_1(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega$$

Dim. $\Leftarrow$ OVVIA. infatti si ha

q.o. x $\forall s \in \mathbb{R}^N$ $\quad G(x,s) \geq G(x, u_1(x)) + s \cdot u_2(x)$

Metto $u(x)$ al posto di s, $(u \in \mathbb{L}_1)$; e integro $\Rightarrow$

$$\int_\Omega G(x, u(x))\,dx \geq \int_\Omega G(x, u_1(x))\,dx + \int u_1(x) \cdot u_2(x)\,dx$$

dunque $u_2 \in \partial \mathcal{G}(u_1)$

$\Rightarrow$ Supponiamo che $u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ e $u_2 \in \partial \mathcal{G}(u_1)$. Allora

$$\mathcal{G}(u_1) + \mathcal{G}^*(u_2) = \langle u_1 \cdot u_2 \rangle_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2}$$

$\Updownarrow$ (uso il teorema sopra, dato che $u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$)

$$\int_\Omega \left(G(x,u_1) + G^*(x,u_2) - u_1 \cdot u_2 \right) dx = 0$$

MA L'INTEGRANDO è ≥ 0 per Young $\Rightarrow$

L'INTEGRANDO $= 0$ cioè la tesi $\#$

Vediamo delle condizioni su G che implicano le ipotesi usate sopra ($\mathcal{G}_G$ s.c.i / $\mathcal{D}(\mathcal{G}_G) \neq \emptyset$ / $\mathcal{G}_G$ continua)

Dato $p \in [1, +\infty[$ considero l'ipotesi

(G^-, p) $\quad \exists\, a_0 \in L^1(\Omega)$, $\exists\, b_0 \in L^{p'}(\Omega)$ tali che

(G^+, p)

$$G(x,s) \geq -a_0(x) - b_0(x) \|s\|_{\mathbb{R}^M}$$

$$G(x,s) \leq a_0(x) + b_0(x) \|s\|_{\mathbb{R}^M}$$

Fatto: Se vale $(G^-, p) \Rightarrow \mathcal{G}_G$ è s.c.i su $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$

& vale $(G^+, p) \Rightarrow \mathcal{G}_G$ è s.c.s. su $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$

Metteremo sempre la G^-

Dim. Supponiamo che $u_n \xrightarrow{L^p} u$; allora (a meno di una s.s.) posso supporre $u_n \to u$ q.o.

Osservo che, per la (G^-, p) si ha

$$G(x, u_n(x)) \geq \overbrace{\underset{\substack{\Uparrow \\ L^1}}{-a_0(x)} - \underbrace{b_0(x)\,|u_n(x)|}_{}}^{w_n}.$$

w_n converge in L^1 a $b_0 u$

$$\left(\| b_0 u_n - b_0 u \|_{L^1} \leq \| b_0 \|_{p'} \, \| u_n - u \|_p \to 0 \right)$$

Se $G(\cdot, u_n) \geq w_n$ con $w_n \xrightarrow{L^1} w$ allora vale Fatou con minimo limite:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(x, u_n) \geq \int_\Omega \underbrace{\liminf_{n\to\infty} G(x, u_n)}_{} \, dx \geq \int_\Omega \underbrace{G(x, u)}_{}$$

(q.o.) $\geq$ perché G è misurabile

Fatou gen. Se $f_n \xrightarrow{q.o.} f$ e $f_n \geq g_n$ $g_n \xrightarrow{L_1} g$ $\Rightarrow$

$$\liminf_n \int_\Omega f_n \geq \int_\Omega \liminf f$$

(basta considerare $f_n - g_n \geq 0$ . . .)

Stesso discorso per la semicontinuità sup (qui non serve la convessità)

DUNQUE se $|G(x,s)| \leq a_0(x) + b_0(x)|s|$

$$\Rightarrow u \mapsto \int G(x,u)\,dx \text{ è continuo}$$

PROBLEMI ELLITICI SEMILINEARI

Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ $\boxed{N\geq 3}$ $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$

con integrando normale convesso.

$H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^M) = \{ u \in \Omega$ t.c. $\underbrace{\nabla u \in L^2(\Omega)}_{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)}$, "nulle al bordo" $\}$

H^1_0 è un Hilbert con il prod. scal. $\langle u, v \rangle = \int_\Omega \sum_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx$

(a causa della dis. di Poincaré)

Ricordo che $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M) \supset H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^M)$ se $p \leq 2^*$

dove $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ SE $\boxed{N \geq 3}$ (se no ...)

$\left(2^* = \frac{2N}{N-2} > 2 \right)$ (L'immersione è compatta x $p < 2^*$)

PRENDIAMO $1 \leq p \leq 2^*$ IN TUTTO quanto segue. Abbiamo:

$$\| u \|_{L^p} \leq S_p \| u \|_{H^1_0} \quad \forall u \in H^1_0 \text{ per una opportuna } S_p > 0$$

Poniamo $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ ($|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^M |\nabla u_i|^2$) PIU' precisamente $\mathcal{E} : L^p \to [0, +\infty]$

$$\mathcal{E}(u) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx & \text{se } u \in H^1_0 \\ +\infty & \text{se } u \in L^p \setminus H^1_0 \end{cases}$$

$(\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1_0)$

Fatti: (a) $\mathcal{E}$ è s.c.i. Dimostro che $\forall c \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\mathcal{E}^c$ è chiuso.

Se $u_n \xrightarrow{L^p} u$, $\mathcal{E}(u_n) \leq c \Rightarrow \|u_n\|_{H^1_0} \leq$ cost. $\Rightarrow$ a meno di s.s.

$u_n \xrightharpoonup{H^1_0} u_1 \Rightarrow u_n \xrightharpoonup{L^p} u_1 \Rightarrow \boxed{u_1 = u}$ In definitiva:

ho $u_n \xrightarrow{L^p} u$ e $u_n \xrightharpoonup{H^1_0} u$ (sono passato a una s.s.)

Dato che $\mathcal{E}(u) = \|u\|^2_{H^1_0} \Rightarrow \liminf_{u' \to u} \|u_n\|^2 \geq \|u\|^2$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n) \geq \left(\mathcal{E}(u_1) = \right) \mathcal{E}(u)$$ ok.

(b) Siano $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1_0$ e $u^* \in L^{p'}$. Allora

$$u^* \in \partial\mathcal{E}(u) \iff \underbrace{-\Delta u \in L^{p'}}_{\text{nel senso delle distr.}} \text{ e } u^* = -\Delta u$$

Dim. Abbiamo già visto che

$$u^* \in \partial\mathcal{E}(u) \iff \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx}_{\mathcal{E}'(u)(v)} \geq \int u^* v \, dx \quad \forall v \in H^1_0$$

$(v-u)$ $(v-u)$ $\forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

per linearità

$$\iff \underbrace{\int \nabla u \nabla v \, dx = \int u^* v \, dx \quad \forall v \in H^1_0}_{\text{VUOL DIRE - PER DEF. - } -\Delta u = u^* \in L^{p'}}$$

(è comunque una maggiore regolarità di u rispetto a $u \in H^1_0$) #

Def. Consideriamo $I : L^p(\Omega, \mathbb{R}^M) \to [-\infty, +\infty]$ def da

$$I(u) = \begin{cases} \mathcal{E}(u) + \mathcal{G}_G(u) & \text{se } u \in H^1_0 \text{ e } \mathcal{G}_G(u) < +\infty \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathcal{D}(I) = \{ u \in H^1_0 : G(\cdot, u) \in L^1 \}$$

Fatto Se vale $(G^- p) \Rightarrow I : L^p \to]-\infty, +\infty]$,

$I = \mathcal{E} + \mathcal{G}_G$ e I è s.c.i.

Segue da quanto trovato fino ad ora.

Prop. Siano $u \in \mathcal{D}(I)$ $\left(u \in H^1_0 \; G(\cdot, u) \in L^1\right)$ e sia $u^* \in L^{p'}$

$u^* \in \partial I(u) \Leftrightarrow$ ⊛ $\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx}_{E'(u)(v-u)} + \int_\Omega \overbrace{\underbrace{G'(x,u)(v-u)}_{\in [-\infty,+\infty[}}^{G'(u)(v-u) \text{ è già visto}}\,dx \geq \int_\Omega u^*(v-u)\,dx$

$\forall v \in \mathcal{D}(I)$ $\left(v \in H^1_0,\ G(\cdot,v) \in L^1 \right)$

Nota Come già visto, se $u, v \in \mathcal{D}(I) \Rightarrow u, v \in \mathcal{D}G \Rightarrow G'(\cdot,u)(v-u)$ (che è una derivata direzionale in $\mathbb{R}^N$) è superiormente integrabile. Dalla dis. sopra si ha $u \in \mathcal{D}(I)$ $u^* \in \partial I(u) \Rightarrow G'(\cdot,u)(v-u) \in L^1$

Dim. Segue dal fatto che l'espressione a dx di "$\Leftrightarrow$" è proprio

$$I'(u)(v-u) \;(= E'(u)(v-u))$$

OSS. La ⊛ equivale a

⊛⊛ $$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int (G(x,v) - G(x,u))\,dx \geq \int u^*(v-u)\,dx$$

in effetti so che $G(\cdot,v) - G(\cdot,u) \geq G'(\cdot,u)(v-u)$ (per la convessità)

Dunque ⊛ $\Rightarrow$ (⊛⊛). Inoltre,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla \underset{(v-u+u)}{v}^2 - \frac{1}{2}\int \nabla u^2 = \cancel{\frac{1}{2}\int \nabla u^2} + \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + \frac{1}{2}\int |\nabla (v-u)|^2 - \cancel{\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2}$$
$$\geq \int \nabla u \nabla (v-u)\,dx$$

Dunque:

$$I(v) - I(u) \geq \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int G(x,v) - G(x,u) \geq$$

(da (⊛⊛)) $\int_\Omega u^*(v-u)\,dx \Rightarrow u^* \in \partial I(u)$ (per definizione)

(⊛) $\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_\Omega G'(x,u)(v-u)\,dx \geq \int_\Omega u^*(v-u) \quad \forall v \in \mathcal{D}(G)$

$(\forall v \in H^1_0 \text{ con } G(\cdot,v) \in L^1)$

Mi piacerebbe poter scrivere

$$(***)\ \Delta u + u^* \in \partial G(\cdot, u) \quad \text{q.o.} \qquad \{\}$$
$(-\Delta u \in L^{p'}\ e)$

Prop Supponiamo che valgano (G^+, p) e (G^-, p). ...
(REGOLARITÀ!)
Allora se $u^* \in \partial I(u) \Rightarrow (***)$

Dim $(G^+, p) + (G^-, p) \Rightarrow \mathcal{G}_G = \mathcal{G}$ è continuo in L^p.

$\Rightarrow$ Vale il teorema di somma: $\partial I(u) = \partial \mathcal{E}(u) + \partial \mathcal{G}(u)$,

Dunque se $u^* \in \partial I(u)$

$$\Rightarrow \quad u^* = u_1^* + u_2^* \quad \text{dove} \quad \underbrace{u_1^* \in \partial \mathcal{E}(u)}_{(a)} \quad e \quad \underbrace{u_2^* \in \partial \mathcal{G}_G(u)}_{(b)}$$

$$(a) \Rightarrow \quad -\Delta u = u_1^* \in L^{p'}(\Omega)$$

$$(b) \Rightarrow \quad u_2^*(x) \in \partial G(x, u(x)) \quad \text{q.o.} x$$

Dato che $u_2^* = -u_1^* + u^*$ si ricava $(***)$

Teorema Supponiamo che valga (G^-, p). ① Allora esiste unica $\bar{u}$ tale che $G(\cdot, \bar{u}) \in L^1$ e si ha

$$(*)_0 \quad \int_\Omega \nabla \bar{u}\, \nabla(v - \bar{u})\, dx + \int G'(x, \bar{u})(v - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall v \in H_0^1 \text{ con } G(\cdot, v) \in L^1$$

② Se vale anche (G^+, p) la $\bar{u}$ verifica:

$$-\Delta \bar{u} \in L^{p'} \quad e \quad \Delta \bar{u} \in \partial G(\cdot, \bar{u}) \quad \text{q.o. in } \Omega$$

③ Se in più $G(x, \cdot)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^M$ q.o. $x \Rightarrow$

$$-\Delta \bar{u} \in L^{p'} \quad e \quad \Delta \bar{u} = \nabla_s G(\cdot, \bar{u})$$

Dim Cerco $\bar{u}$ come pto di minimo di I su $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$

Supponiamo che I è s.c.i. (per G^-), I è convesso, Dimostro che è coercivo: Da G segue

$$G(\cdot, u) \geq -a_0 - b_0 \|u\|_{\mathbb{R}^M}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{G}(u) \geq -\|a_0\|_{L^1} - \|b_0\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p}$$

$$\Rightarrow \quad I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H^1_0} - \|a_0\|_{L^1} - \|b_0\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} \geq$$

$$\frac{1}{2S_p} \|u\|^2_{L^p} - \|a_0\|_{L^1} - \|b_0\|_{p'} \|u\|_{L^p}$$

$$\Rightarrow \lim_{\|u\|_p \to \infty} \frac{I(u)}{\|u\|_p^2} \geq \frac{1}{2S_p} > 0$$

$\Rightarrow$ Il minimo esiste. .. Se $\bar{u}$ è di minimo verifico $(*)_0$ ($0 \in \partial I(\bar{u})$). Se $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ verificano $(*)_0 \Rightarrow$

scrivo $(*_0)$ per $\bar{u}_1$ con $v = \bar{u}_2$ e viceversa $\Rightarrow$

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}_1 \nabla (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) dx + \int G'(x, \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \geq 0$$

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}_2 \nabla (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) dx + \int G'(x, \bar{u}_2)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \geq 0$$

$$-\int |\nabla(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)|^2 dx + \underbrace{\int G'(x, \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + \int G'(x, \bar{u}_2)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}_{\leq 0 \text{ per la monotonia di } \partial G} \geq 0$$

??

$$\Rightarrow \quad \|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\|_{H^1_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_1$$

UNICITÀ OK

Il resto segue da quanto fatto prima.

SI PROTREBBE FARE TUTTO IN H^1_0 considerando

.

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 dx + \int G(x,u)dx$$

$\tilde{I} : H^1_0 \to]-\infty, +\infty]$ SUPPONGO $G^- (\Leftarrow) \mathcal{G} > -\infty$ è s.c.i.

(Formalmente $\tilde{I} = I \circ j$ dove $j : H^1_0 \to L^p$; $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\circ j$, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}\circ j$)

È semplice verificare che $\tilde{I}$ è s.c.i. su H^1_0, ed è convesso

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0} + \tilde{\mathcal{G}}(u) \qquad \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}\circ j$$

$\tilde{I}$ è coercivo e se prendo $\bar{u}$ di minimo per $\tilde{\mathcal{E}}$ valgono le stesse relazioni.

"I punti stazionari di $\tilde{I}$ sono gli stessi di $\tilde{I}$"

per $\tilde{u}^* \in \partial\tilde{I}(u)$ ($\tilde{u}^* \in H^1_0$ = visto come duale di H^1_0, $\langle\cdot,\cdot\rangle = \int\nabla u\nabla v$)

$$\Updownarrow$$

" $\tilde{u}^* = u + j^*(\partial G(\cdot,u))$ ANDREBBE CHIARITO

(se $\tilde{u}^* = 0$ ho: $u + j^*(\partial G(\cdot,u)) = 0 \Leftrightarrow$)
$j^* \to -\Delta^{-1}$

PERCHÉ PUÒ ESSERE INTERESSANTE RAGIONARE IN L^p

Per esempio può essere interessante l'equazione di evoluzione

" $u' = -\nabla I(u)$ " in altri termini

$$\boxed{-u'(t) \in \partial I(u(t))}$$ che, se considero I in L^p,

diventa l'equazione del calore. $u'(t) = \Delta u(t) + \underbrace{\partial G(\cdot, u(t))}$

(mentre in H^1_0 è più brutale $u' = u + \underbrace{\partial G(\cdot, u)}$)