Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 71   27/05/2025

TORNIAMO SULLE SUPERFICI

VALE LA SEGUENTE COSA:

- SUPPONIAMO $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $G, H_1 \dots H_k : \Omega \to \mathbb{R}$ che verificano le condizioni di non tangenza:

  (N.T.) se x è tale che $G(x)=0$, $H_{i_1}(x) = \dots = H_{i_h}(x) = 0$ $\Rightarrow$

  $$\nabla G(x),\ \nabla H_{i_1}(x),\ \dots,\ \nabla H_{i_h}(x)$$

  sono linearmente indipendenti.

  (N.B. Dato che siamo in $\mathbb{R}^3$ ci possono essere al massimo tre eguaglianze in x)

  Poniamo $S := \{ x \in \Omega : G(x)=0,\ H_1(x) \le 0, \dots, H_k(x) \le 0 \}$
  e supponiamo che S sia chiuso

- ALLORA S è una SUPERFICIE. Inoltre
  - $\displaystyle \Sigma(S) = \bigcup_{i=1}^{k} \{ G(x)=0,\ H_i(x)=0,\ H_j(x) \le 0 \text{ se } i \ne j \} = \bigcup_{i=1}^{k} \{ x \in S : H_i(x) = 0 \}$
  - $\displaystyle \Sigma^*(S) = \bigcup_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots k \\ i \ne j}} \{ x \in S : H_i(x) = H_j(x) = 0 \}$

$$\Rightarrow \Sigma(S)\setminus\Sigma^*(S) = \bigcup_{i=1}^{k} \{x\in S : H_i(x)=0,\ H_j(x)<0 \text{ se } i\neq j\}$$

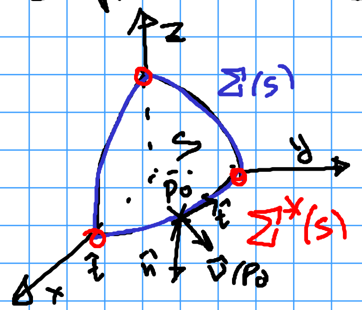
• Inoltre, se $x \in \Sigma(S)\setminus\Sigma^*(S)$, so che è definito $\hat{n}(x)$ ($\hat{n}(x) \in T_S(x)$ ed è ortogonale a $T_{\Sigma(S)}(x)$)

Si ha che

$$\hat{n}(x) \perp \nabla G(x),\ \hat{n}(x) = \lambda\nabla G(x) + \mu\nabla H_i(x) \quad \text{e } \hat{n}(x) \text{ è concorde con } \nabla H_i(x)$$

dove H_i è l'unico t.c. $H_i(x)=0$

Per esempio se $S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$



effettivamente S è del tipo detto sopra dove

$(P=(x,y,z))$

$G(P) = x^2+y^2+y^2-1$

$H_1(P) = -x \qquad H_2(P) = -y \qquad H_3(P) = -z$

Non verifico la (N.T.) - fidiamoci che è vero.

IL FATTO SOPRA CI GARANTISCE CHE S è una superficie, che

$\Sigma(S) = \{x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0, z=0\} \cup \{x^2+z^2=1, x\geq 0, y=0, z\geq 0\} \cup \{y^2+z^2=1, x=0, y\geq 0, z\geq 0\}$

$\Sigma^*(S) = \{x=1, y=0, z=0\} \cup \{y=1, x=z=0\} \cup \{z=1, x=y=0\}$

• Se poi prendo $P_0 \in \Sigma(S)\setminus\Sigma^*(S)$, per esempio $P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ posso calcolare $\hat{\nu}(P_0)$ che $\hat{n}(P_0)$.

$$\hat{\nu}(P_0) = \frac{\nabla G(P_0)}{\|\nabla G(P_0)\|} = \frac{\cancel{2}x_0\vec{i} + \cancel{2}y_0\vec{j} + \cancel{2}z_0\vec{k}}{\cancel{2}\underbrace{\|x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}\|}_{=1}} = \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}}_{\hat{\nu}(P_0)}$$

SI VEDE "A OCCHIO" che $\hat{n}(P_0) = -\vec{k}$

• Per trovare $\hat{n}$ individuo la H che si annulla in P_0. Si ha che $H(x,y,z) = -z \Rightarrow \nabla H(z) = -\vec{k}$

• So che $\hat{n}(P_0) = \lambda\nabla G(P_0) + \mu\nabla H(P_0)$, $\|\hat{n}\| = 1$

$\hat{n}\cdot\nabla G(P_0) = 0$ e $\hat{n}$ concorde con $\nabla H(P_0)$

dunque $\hat{n} = \lambda 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) - \mu\vec{k}$

$\underbrace{\text{da } \hat{n}\cdot\nabla G = 0}$, moltiplico per ∇G qui sopra (qui ho ∇G e ∇H sono ortogonali)

$\Rightarrow 0 = 2\lambda\|\nabla G\|^2 - \mu\underbrace{\vec{k}\,\nabla G}_{=0} \Rightarrow \lambda = 0$

$\hat{n} = -\mu\vec{k}$

dato che $\hat{n}$ è concorde con $-\vec{k} \Rightarrow \mu \geq 0$.

dato che $\|\hat{n}\| = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{n}(P_0) = -\vec{k}}$

DUNQUE NON DEVO RICORRERE A UNA PARAMETRIZZAZIONE

OSSERVAZIONE Ho detto qui sopra che $\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|}$

Dicendo questo ho fatto una scelta!! → ho preso la normale "USCENTE DA D" dove $D = \{G \leq 0, H_1 \leq 0 \ldots, H_r \leq 0\}$

AVREI DOVUTO DIRE CHE $\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}$ è una possibile scelta di una normale

E DUNQUE $\boxed{S \text{ è ORIENTABILE}}$

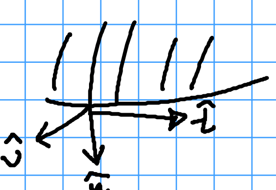
Se ussassi $\hat{\nu} = -\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}$, troverei lo stesso $\hat{n}$

PERÒ CAMBIEREBBE L'ORIENTAMENTO DI $\Sigma(S)$.

Vediamo come si trova $\hat{t}(P_0)$ — CON LA SCELTA DI $\hat{\nu}(P_0)$ fatta sopra.

$\hat{t}$ è perpendicolare a $\hat{\nu}$ e $\hat{n}$

e la terna $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{\nu})$ è destrorsa $\Leftrightarrow$



$$\begin{pmatrix} \hat{\nu} \simeq \text{asse } z \\ \hat{n} \simeq \text{asse } x \\ \hat{t} \simeq \text{asse } y \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso $\hat{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\quad \hat{n} = -\frac{K}{K}$

$\Rightarrow \hat{t} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ (è ortogonale a $\hat{n}$)

e $\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \alpha^2+\beta^2 = 1$

$\hat{t} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$(\hat{v}, \hat{n}, \hat{t})$ è destrorso $\Leftrightarrow \det\left|\hat{v}, \hat{n}, \hat{t}\right| > 0$

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \text{ ??}$$ (se no cambiamo segno a $\hat{t}$)

$$\parallel$$

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -1 < 0$$ NO (cambio segno)

$$\hat{t}(P_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

- Se avessi preso $\hat{v}$ opposto, $\hat{n}$ sarebbe rimasto uguale e $\hat{t}$ avrebbe cambiato segno.

OPPURE (meglio) $\boxed{\hat{t} = \hat{v} \otimes \hat{n}}$

$(\hat{v}, \hat{n}, \hat{t})$ destrorso

ESERCIZIO (Dal compitino 6/1/2023)

Consideriamo

$$D := \{0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \ge 1\}$$

Vediamo che D è un dominio regolare, ecc.

$D = \{ G_1 \le 0,\ G_2 \le 0,\ G_3 \le 0 \}$ dove

$G_1 = -z$, $G_2 = z + x^2 + y^2 - 4$, $G_3 = 1 - x^2 - y^2$

$\nabla G_1 = -\vec{k}$ $\quad \nabla G_2 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$ $\quad \nabla G_3 = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$

$\partial D = \{ G_1 = 0, G_2 \le 0, G_3 \le 0 \} \cup \{ G_1 \le 0, G_2 = 0, G_3 \le 0 \} \cup \{ G_1 \le 0, G_2 \le 0, G_3 = 0 \}$

$= \underbrace{\{ z = 0 \ \ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \}}_{B \ (\text{base..})} \cup \underbrace{\{ z \ge 0,\ z = x^2+y^2-4,\ x^2+y^2 \ge 1 \}}_{S} \cup \underbrace{\{ 0 \le z \le 3,\ x^2+y^2 = 1 \}}_{C \ (\text{cilindro..})}$

Se $P = (x,y,z) \in S \Rightarrow x^2+y^2-4 = z \ge 0$, e $x^2+y^2 \ge 1 \Rightarrow 1 \le x^2+y^2 \le 4$ e $z = x^2+y^2-4$

Viceversa se $1 \le x^2+y^2 \le 4$ e $z = x^2+y^2-4 \Rightarrow P \in S$

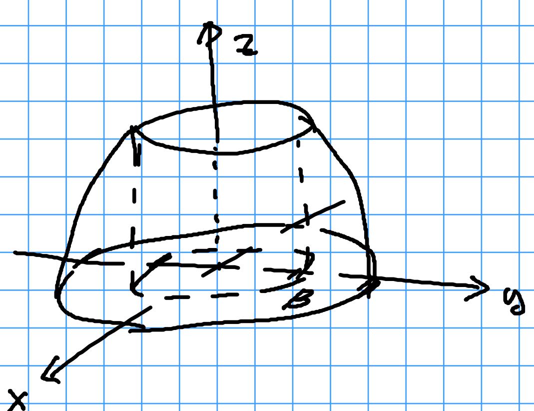
Dunque $S = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ z = x^2+y^2-4 \}$ cioè:

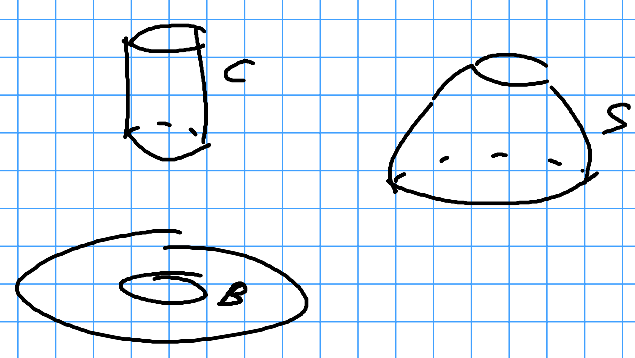
posto $\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{B'}} = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 4 \} \Rightarrow S$ è grafico della $g(x,y) = x^2+y^2-4$ definita su B'

e volendo $B =$ grafico della funzione $g(x,y) = 0$ su B'

Posso anche dire che $D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B' \text{ e } 0 \le z \le \overbrace{x^2+y^2-4}^{g(x,y)} \}$

cioè D è normale rispetto all'asse z (o al piano (x,y))





Per dim che D è reg. e tutti devo dim. B (N.T)

① Se $P \in B \cap S$ $(G_1 = 0, G_2 = 0) \Rightarrow \nabla G_1$ e ∇G_2 lin. ind.

$$\nabla G_1 = -\vec{k} \qquad \nabla G_2 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

se fossero lin. dip. $x = y = 0 \Rightarrow P = 0$ IMPOSSIBILE

② Se $P \in S \cap C$ $(G_2 = 0, G_3 = 0)$

$2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$ e $-2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ son lin. indip

è vero perché $\vec{k}$ è indip da i e j

③ Se $P \in B \cap C$ $(G_1 = 0, G_3 = 0)$

$-\vec{k}$ e $-2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ lin. indip SI

DECIDIAMO DI USARE $\boxed{\hat{\nu}(P)}$ la normale uscente da D per orientare ∂D ($\hat{\nu}(P)$ è definito fuorché sugli "spigoli")

($\Sigma^*(\partial D) = \{G_1 = G_2 = 0, G_3 \le 0\} \cup \{G_1 = 0\ G_2 \le 0, G_3 = 0\} \cup \{G_1 \le 0, G_2 = G_3 = 0\}$ (non ci sono punti in cui $G_1 = G_2 = G_3 = 0$)

USIAMO DUNQUE $(B, -\vec{k})$, $(S, \hat{\nu})$, $(C, \hat{\nu})$ in tutto quanto segue.

NATURALMENTE B, S e C hanno dei bordi — mentre ∂D non ha bordo. QUANDO "INCOLLO" B, S e C i "bordi spariscono". In effetti deve essere che — se due superfici orientate si incollano bene, i versi dei bordi sono opposti nei punti corrispondenti

VEDIAMO I BORDI DI B, S, C e i loro orientamenti coerenti con $\hat{\nu}$.

$B = \{ (x,y) \in B',\ z=0 \} \Longleftrightarrow \{ G_1=0,\ G_2 \le 0\ G_3 \le 0 \}$

Per quanto detto all'inizio della lezione

$\Rightarrow \Sigma(B) = \{ G_1=0,\ G_2=0,\ G_3 \le 0 \} \cup \{ G_1=0,\ G_2 \le 0,\ G_3=0 \} =$

$\{ z=0\ \ x^2+y^2=4 \} \cup \{ z=0,\ x^2+y^2=1 \}$

$\Sigma^*(B) = \phi$ perché non ci sono punti in cui $G_1=G_2=G_3=0$

Si capisce che $\hat{\nu} = -k$ (DATO!), mentre

$\hat{n}(P) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{2}$ se $x^2+y^2=4$ / $-x\vec{i}-y\vec{j}$ se $x^2+y^2=1$

(usando ∇G_1 e ∇G_3)

$\hat{t}(P) = \hat{\nu} \otimes \hat{n} = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{2} \otimes (-\vec{k}) =$ (caso $x^2+y^2=4$)

$\dfrac{1}{2}x\vec{j} - \dfrac{1}{2}y\vec{i} = \dfrac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{2}$

se faccio i conti su $x^2+y^2=1$ trovo la direzione opposta

- Prendiamo $C = \{ x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 3 \}$

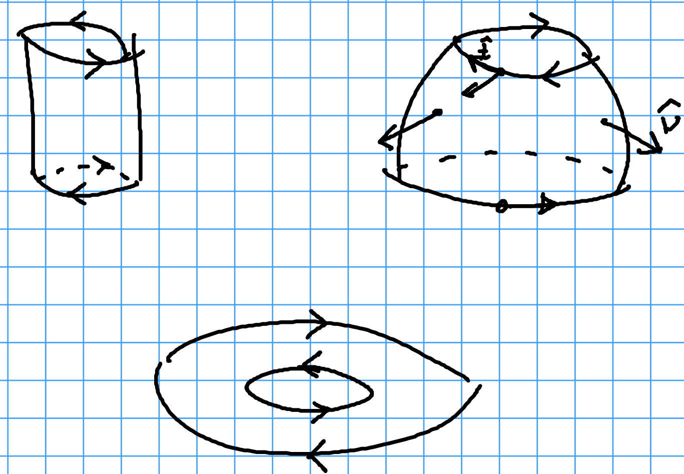
ORA HO ALTRE G_i (anche se potrei usare quelle di prima)

è chiaro che (NO DIM.)

$\Sigma(C) = \{ x^2+y^2=1,\ z=3 \}$
$\{ x^2+y^2=1,\ z=0 \}$

I VERSI SONO QUELLI INDICATI NEL DISEGNO

MENTRE SE GUARDO S



SITUAZIONE DEI VERSI SUL BORDO

FLUSSI DI $\vec{f} := (x^2+y^2+z^2)(y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k})$

su B, S, C

Per trovare i flussi servirebbe parametrizzare B, S, C

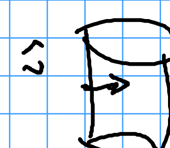
Vediamo se qualcuno di questi flussi è facile

- $\boxed{\Phi(\vec{f}, B, \hat{\nu}) = 0}$ dato che se $P \in B \Rightarrow \hat{\nu}(P) = -\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{f} \cdot \hat{\nu} = f_3(P) = 0$ perché $f_3 = (x^2+y^2+z^2)z$ e $z=0$ su B

(Se $P = (x,y,z) \in K \Rightarrow z=0 \Rightarrow \vec{f}(P) = (x^2+y^2)(y\vec{i} - x\vec{j})$ che è ortogonale a $-\vec{k}$.

- $\Phi(\vec{f}, C, \hat{\nu}) = 0$ anche in questo caso perché se $P \in C \Rightarrow \nu(P) = -(x\vec{i} + y\vec{j})$



(lo si vede a occhio - lo si ricava usando

$G(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2$ ($C = \{G = 0\}$)

$\nabla G(x,y,z) = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 0\vec{k}$ ← NORMALIZZO e trovo

IN QUESTI PUNTI $\vec{f}(P) = (y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k})(x^2+y^2+z^2)$ che si vede essere ortogonale a $\hat{\nu}(P)$

- RIMANE $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ ← lo posso calcolare in due modi.

• Modo standard: parametrizzo S. Dato che S è grafico di $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ su $B' = \{ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \}$

posso usare $\Gamma(x,y) = (x, y, g(x,y)) \Longrightarrow$

$$\vec{N}_\Gamma(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} =$$

$$2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$ ← PUNTA VERSO L'esterno

Noto che $\vec{N}_\Gamma(x,y)$ è $\boxed{\text{concorde}}$ con $\hat{\nu}(\Gamma(x,y))$

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{\nabla G_2(x,y,z)}{\|\nabla G_2\|} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$G_2 = z + x^2 + y^2 - 4$$

Ne segue $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_{B'} \vec{f}(\overbrace{x, y, g(x,y)}^{\Gamma(x,y)}) \cdot \vec{N}_\Gamma(x,y)\, dx\,dy =$

$$\iint_{B'} (x^2 + y^2 + g(x,y)^2)\big(2y\vec{i} - 2x\vec{j} + g(x,y)\vec{k} \big) \cdot \big(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k} \big)\, dx\,dy =$$

ortogonali

$$\iint_{B'} (x^2 + y^2 + (4 - x^2 - y^2)^2)(4 - x^2 - y^2)\, dx\,dy \to \text{Coord. polari}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (\rho^2 + (4-\rho^2)^2)(4-\rho^2)\,\rho\, d\rho = 2\pi \int_1^2 \text{———}\, \rho\, d\rho =$$

$\rho^2 = s$

$2\rho\, d\rho = ds$

$$\pi \int_1^4 (s + (4-s)^2)(4-s)\, ds = \pi \int_1^4 (s + 16 + s^2 - 8s)(4-s)\, ds = \dots$$

$$\pi \int_1^4 (16 - 7s + s^2)(4-s)\, ds = \pi \int_1^4 (64 - 28s + 4s^2 - 16s + 7s^2 - s^3)\, ds =$$

$$\pi \int_1^4 (64 - 44s + 11s^2 - s^3)\, ds = \dots$$

ALTRO MODO USANDO LA DIVERGENZA:

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{g}\, dx\,dy\,dz = \Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu})$$

$$(\Phi(C) = \Phi(B) = 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)y + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)(-x)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)z = 2xy - 2yx + (x^2+y^2+z^2) + 2z^2$$

$$= x^2+y^2+3z^2$$

$$\to \iiint_D x^2+y^2+3z^2\, dx\,dy\,dz = \iint_{B'}\left(\int_0^{4-x^2-y^2}(x^2+y^2+3z^2)dz\right)dx\,dy =$$

$$\iint_{B'}\left[(x^2+y^2)z + z^3\right]_0^{4-x^2-y^2} dx\,dy =$$

$$\iint_{B'}\left((x^2+y^2)(4-x^2-y^2) + (4-x^2-y^2)^3\right)dx\,dy \leftarrow \text{COORD POLARI}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \left(\rho^2(4-\rho^2) + (4-\rho^2)^3\right)\rho\, d\rho =$$

$$2\pi\int_1^2 \left(\rho^2 + (4-\rho^2)^2\right)(4-\rho^2)\rho\, d\rho \qquad s = \rho^2$$

$$\pi\int_1^4 (s-(4-s)^2)(4-s)\,ds \qquad \text{(quello di prima!)}$$

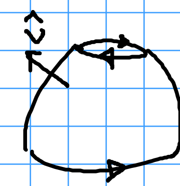
sostituisco $4-s=\sigma$ $\qquad ds = -d\sigma$

$$= \pi\left(-\int_3^0 (4-\sigma+\sigma^2)\sigma\, d\sigma\right) = \pi\int_0^3 (4\sigma - \sigma^2 + \sigma^3)\,d\sigma =$$

$$\pi\left[2\sigma^2 - \frac{\sigma^3}{3} + \frac{\sigma^4}{4}\right]_0^3 = \pi\left(2\cdot 9 - 9 + \frac{81}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(36+81)$$

$$= \frac{\pi}{4}\,117$$

ULTIMA DOMANDA: $\iint_S \text{rot}\,\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$



S

(Stokes)

$= \int_{\Sigma'(S)_\nu} \vec{f}\cdot d\vec{s}$

devo descrivere $\Sigma'(S)$ con delle curve aventi verso concorde con $\hat{\nu}$

$$\Sigma'(S) = \{ x^2+y^2 = 1,\ z = 3 \} \cup \{ x^2+y^2 = 4,\ z = 0 \}$$

uso $\gamma_1(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} + 3\vec{k}$ (SOPRA)

$\gamma_2(\theta) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$

$$\Phi(\text{rot}\,\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{f}(\cos\theta, -\sin\theta, 3)\cdot(-\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j})\,d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{f}(\cos\theta, \sin\theta, 0)\cdot(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 10(-\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} + 3\vec{k})(-\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j})\,d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi} 4(2\sin\theta\,\vec{i} - 2\cos\theta\,\vec{j})(-2\sin\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j})\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 10\,d\theta + \int_0^{2\pi} 4(-4)\,d\theta = -6\int_0^{2\pi} d\theta = -12\pi$$

PROVIAMO A CALCOLARE DIRETTAMENTE $\Phi(\text{rot}\,\vec{f}, S, \hat{\nu})$

$$\text{rot}\,\vec{f} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & (x^2+y^2+z^2)\,y \\ \vec{j} & D_y & (x^2+y^2+z^2)(-x) \\ \vec{k} & D_z & (x^2+y^2+z^2)\,z \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(D_y(x^2+y^2+z^2)z - D_z(x^2+y^2+z^2)(-x) \right) +$$

$-\vec{j}\left(D_x\,(x^2+y^2+z^2)z - D_z(x^2+y^2+z^2)y \right)$

$+\vec{k}\left(D_x\,(x^2+y^2+z)(-x) - D_y\,(x^2+y^2+z^2)y \right) =$

$\vec{i}\,(2yz + 2zx) - \vec{j}\,(2xz - 2yz)$

$+\vec{k}\left(-3x^2 - y^2 - z^2 - x^2 - z^2 - 3y^2\right) =$

$-4x^2 - 4y^2 - 2z^2$

Dovrei parametrizzare S (come fatto prima) e calcolare $\Phi(\mathrm{rot}\,\vec{F}, S, \hat{\nu})$

LASCIAMO PERDERE...

FINE