Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 70 26/05/2025

L'ultima volta abbiamo visto un sistema di ordine 3 $Y' = AY$ dove A ha un solo autovalore $\bar{\lambda}$ (dunque $m_A(\bar{\lambda}) = 3$) con $m_G(\bar{\lambda}) = 2$

ESERCIZIO (compito del 19/4/2024)

$$(S) \begin{cases} x' = 4x - 2y - 3z - 1 \\ y' = 2x - y - 2z - 1 \\ z' = 3x - 2y - 2z \end{cases}$$

cioè $Y' = AY + B(t)$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(B non dipende da t)

(domanda 1) trovare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica.

— pol. caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(4-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda) + 2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 2 -$$

$$\Big((4-\lambda)\cdot 2\cdot 2 + \overset{(2+\lambda)4}{(-2-\lambda)(2)(-2)} + \overset{(1+\lambda)9}{(-1-\lambda)(3)(-3)} \Big) =$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) + 24 - \left(16 - \cancel{4\lambda} + 8 + \cancel{4\lambda} + 9 + 9\lambda \right) =$$

$\underline{4\lambda^2} + \underline{12\lambda} + \cancel{8} - \lambda^3 \underline{- 3\lambda^2} \underline{- 2\lambda} + 24 - 16 - \cancel{8} - 9 \underline{- 9\lambda} =$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$

Vediamo $p(1)$ e $p(-1)$ $\begin{cases} p(1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0 & 1 \text{ è radice} \\ p(-1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 & -1 \text{ è radice} \end{cases}$

divido $p(\lambda)$ per $(\lambda - 1)$

	-1	1	1	-1
1		-1	0	1
	-1	0	1	0

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 1$ con $m_A = 2$

$\lambda_2 = -1$ con $m_A = 1$

Per la molteplicità geometrica mi servono $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) / \dim(\mathrm{Ker}(A+I))$

$\bullet\ B_1 = A - I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ($\det \neq 0$) ha rango 2 (trovo due colonne indipendenti)

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A-I)$ ha dim. 1

$$m_G(\lambda_1) = \boxed{m_G(1) = 1}$$

Per l'altro la risposta è ovvio $m_G = m_A = \boxed{1 = m_G(-1)}$

(domanda 2) trovare (se esiste) una soluzione costante di (S)

cioè $\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Impongo che valga (S)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{Y}'(t) = A\bar{Y} + B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 4a - 2b - 3c = 1 \\ 2a - b - 2c = 1 \\ 3a - 2b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -1 & \leftarrow \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \\ 2a - b = -1 \\ 3a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ -a = 0 & \mathrm{III} - 2\mathrm{II} \\ b = 1 \end{cases} \qquad \bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(terza domanda) Trovare la soluzione di (S) con condizione iniziale $x(0)=y(0)=(0)\quad z(0)=0\qquad \left(Y(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

— Cerco $Y(t)=Y_0(t)+\overline{Y}(t)$ con Y_0 sol. di $Y_0'=AY_0$

(Y_0 sol. del sistema omogeneo) Se prendo $t=0$ ho

$$Y(0)=Y_0(0)+\overline{Y}(0) \iff Y_0(0)=\overset{\text{deve essere zero}}{Y(0)}-\overline{Y}(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=:Y_0$$

Dunque devo risolvere

$$\begin{cases} Y'=AY_0\\ Y_0(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=Y_0\end{cases}\implies Y_0(t)=e^{tA}Y_0$$

Mi serve la forma di Jordan di A.

$m_G(1)=1$ - un solo autovettore

Da quanto detto sopra segue che $J=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right]$

Mi serve la M tale che $A=MJM^{-1}$. $\iff$ mi serve un autovettore per $\lambda_2=-1$ e una catena - di lunghezza 2 - per $\lambda_1=1$

$M=[e_1|e_2|e_3]$ con $e_1\in \mathrm{Ker}(A-I)$, $e_1\neq 0$, $e_1=(A-I)e_2$, $e_3\in\mathrm{Ker}(A+I)$, $e_3\neq 0$.

- Cerco $e_3\in \mathrm{Ker}(A+I)\setminus\{0\}$. Se $e_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ devo risolvere $(\lambda=-1)$

$$\begin{cases}5x-2y-3z=0\\2x\qquad -2z=0\\3x-2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x-2y=0\\2x\quad 2y=0\\z=x\end{cases}$$

$x=y=z$ per es. $e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- Cerco $e_2\in\mathrm{Ker}(A-I)^2$ ma $(A-I)e_2\neq 0\ (=e_1)$ $(\lambda=1)$

Devo calcolare $(A-I)^2$ cioè

$$(A-I)^2=\begin{bmatrix}3&-2&-3\\2&-2&-2\\3&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&-3\\2&-2&-2\\3&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&4&4\\-4&4&4\\-4&4&4\end{bmatrix}$$

$\underset{\sim\sim\sim}{9-4-9}=-4\ /\ 3(-2)+(-2)(-2)+(-3)(-2)=-6+4+6$

$3(-3)+(-2)(-2)+(-3)(-3) = -9+4+9=4$

$2(3)+(-2)(2)+(-2)(3) = 6-4-6 = -4$

$2(-2)+(-2)(-2)+(-2)(-2) = -4+4+4=4$

Dunque $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A-I)^2 \iff x = y+z$

Noto che $Y_0 \in \ker(I-1)^2$. Prendo $e_2 = Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e a questo punto prendo $e_1 = (A-I)e_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dunque $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ne segue che

$Y_0(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0$ $\left(M\hat{e}_2 = e_2 \iff M^{-1} e_2 = \hat{e}_2 \right)$

$$\overset{\shortparallel}{M e^{tJ} \hat{e}_2} = M \begin{bmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e^t t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ -t+1 \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$x(t) = -t e^t$ $y(t) = -e^t$ $z(t) = -(t-1)e^t$

Verifica $Y_0(0) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x'(t) = -e^t - te^t = -(t+1)e^t = (-t-1)e^t$

$4x(t) - 2y(t) - 3z(t) = -4te^t + 2e^t + 3te^t - 3e^t = (-t-1)e^t$ ok

$y'(t) = -e^t$

$2x(t) - y(t) - 2z(t) = e^t(-2t+1+2t-2) = -e^{-t}$ ok

$z'(t) = -e^t - (t-1)e^t = (-t)e^t$ ok.

$$3x(t) - 2y(t) - 2z(t) = e^t(-3t + 2 + 2t - 2) = e^t(-t)$$

PER TROVARE DEVO CONSIDERARE $Y_0(t)+\bar{Y}$!!!

Notiamo che se A è 3×3 ci sono alcuni casi semplici:

- 1 autovalore con 3 autovettori lin. indip ($m_A = m_G = 3$)

$\Leftrightarrow$ $A = \lambda I$ (se dono $e_1\, e_2\, e_3$ lin. indip con $Ae_i = \lambda e_i$

mi metto nella base e_1, e_2, e_3 $\Rightarrow$ scrivo $A = 3\lambda$

$\Leftrightarrow$ $M = I$)

- 3 autovalori distinti $m_A(\lambda_i) = m_G(\lambda_i) = 1$

- 2 autovalori λ_1 e λ_2 con $m_G(\lambda_1) = m_G(\lambda_2) = 1$ $m_G(\lambda) = m_G(\lambda_2) = 1$

In tutti questi casi trovo M e D diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$

per cui $A = MDM^{-1}$. Se prendo

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = MDM^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Applico M^{-1}

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = D \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \lambda_1 u \\ v' = \lambda_2 v \\ w' = \lambda_3 w \end{cases}$$

(ottengo 3 equazioni indipendenti)

GLI ALTRI CASI :

- DUE AUTOV. $\lambda_1\, \lambda_2$ con $m_G(\lambda_1) = m_G(\lambda_2) = 1$ VISTO ORA L'ESEMPIO
- UN SOLO AUTOV. λ_1 : TRE CASI :

$m_G = 3$ (caso semplice - diagonalizzabile)

$m_G = 2$ VISTO IERI UN ESEMPIO

$m_G = 1$ $\leftarrow$ CI MANCA UN ESEMPIO : LO VEDIAMO ORA

ESERCIZIO

$$\begin{cases} x' = 3x - y - z - 3e^t \\ y' = -x + 4z + 5e^t \\ z' = -y + 3z + 2e^t \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix} \qquad B(t)=e^{t}\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$$

- polinomio caratteristico

$$P(\lambda)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&-1\\-1&-\lambda&4\\0&-1&3-\lambda\end{bmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda&4\\-1&3-\lambda\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&3-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$(3-\lambda)\Big(\lambda(\lambda-3)+4\Big)+(\lambda-3)-1=(3-\lambda)\Big(\lambda^2-3\lambda+4\Big)+\lambda-4=$$

$$3\lambda^2-9\lambda+12-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+\lambda-4=-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8=-(\lambda-2)^3$$

$$-\left(\lambda^3+3\lambda^2(-2)+3\lambda(-2)^2+(-2)^3\right)=$$

HO UN SOLO AUTOVALORE $\bar\lambda = 2$ $(m_A=3)$

- Vediamo la molt. geom. cioè la dim di $\ker(A+2I)=$

det≠0 =−3 →

$$\dim\ker\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&-1\\-1&-2\end{matrix}}&\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\\\begin{matrix}0&-1\end{matrix}&1\end{bmatrix} \leftarrow \text{ho rango } 2 \iff \dim\ker = 1$$

$$m_G(\bar\lambda)=1$$

Cerco una sol. particolare

(qui $a=1$, ma faccio un conto generale)

Noto che $B(t)=e^{at}\vec v$ ← viene spontaneo cercare $\bar Y = e^{at}\vec w$ con $\vec w$ da trovare. Se $\bar Y = e^{at}\vec w$ ho $\bar Y' = a e^{at}\vec w$. Dunque - se impongo che valga l'equazione - ottengo

$$a e^{at}\vec w = A\left(e^{at}\vec w\right)+e^{at}\vec v \iff (\text{semplifico } e^{at} \text{ e} \ldots)$$

$$(A-aI)\vec w = -\vec v$$

TUTTO VA BENE se a NON è autovalore. Nel caso che stiamo considerando $a = 1$ $\bar{\lambda} = 2$ ($\bar{\lambda}$ è l'unico autovalore)

$$\Rightarrow \quad \vec{w} = -(A - aI)^{-1}\vec{v}$$

DUNQUE QUESTO METODO FUNZIONA se $p(a) \neq 0$

NEL NOSTRO CASO ABBIAMO $a=1$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ per cui

$\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve risolvere $(A - I)\vec{w} = -\vec{v}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ -x - y + 4z = -5 \\ \quad\ -y + 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ \quad -3y + 7z = -7 \\ \quad -y + 2z = -2 \end{cases} \leftarrow \mathrm{I} + 2\,\mathrm{II}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ \quad -3y + 7z = -7 \\ \quad\quad z = -1 \end{cases} \leftarrow \mathrm{II} - 3\,\mathrm{III} \qquad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \qquad x = 1 \quad y = 0 \quad z = -1$$

$$\bar{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo una sol. del problema (S) con dati iniziali

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ $\Leftrightarrow$ $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Come prima cerco $Y(t) = Y_0(t) + \bar{Y}(t)$ dove $Y_0' = AY_0$. Che condizione iniziale verifica $Y_0(t)$?? Deve essere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Y(0) = Y_0(0) + \bar{Y}(0) = Y_0(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y_0(0) = Y_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque $Y_0(t) = e^{tA} Y_0$. Mi serve la forma di Jordan di A.

Chiamo $B = (A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Mi serve B^2 (che avrà rango 1 mentre B^3 ha rango 0 $\Leftrightarrow B^3 = 0$)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = B^2$$

$1 + (-1)(-1) + (-1)0 = 2$

$1(-1) + (-1)(-2) + (-1)(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

$1(-1) + (-1)(4) + (-1)(1) = -1 - 4 - 1 = -6$

$1 \cdot 1 + -1(-1) + -1 \cdot 0 = 2$

$1(-1) + -1(-2) + -1(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

$1(-1) + -1 \cdot 4 + -1 \cdot 1 = -1 - 4 - 1 = -6$

$0 \cdot 1 + -1(-1) + 1 \cdot 0 = 1$

$0(-1) + (-1)(-2) + (1)(-1) = 1$

$0 \cdot (-1) + (-1) 4 + (1) 1 = -3$

Per motivi generali $B^3 = 0$

($\ker B^3$ ha dim 3 $\Leftrightarrow \ker B^3 = \mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow B^3 = 0$)

A questo punto devo trovare $e_3 \in \ker B^3 \setminus \ker B^2 \Leftrightarrow$ cerco $e_3 \in \mathbb{R}^3$ con $B^2 e_3 \neq 0$. Vediamo se $Y_0 = e_3$ va bene...

$$B^2 Y_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 12 \\ -2 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

ok. posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$e_1 = B^2 e_3 \Leftrightarrow e_1 = -\begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ mentre

$$e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 1 + 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$ da cui

$$M = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ -7 & 9 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e \quad Y_0(t) = M e^{tJ} \underbrace{M^{-1} Y_0}_{\hat{e}_3} = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$(Y_0 = e_3 = M\hat{e}_3)$$

$$e^{2t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{e}_3 = e^{2t} M \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ -7 & 9 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -7t^2 - 3t - 1 \\ -\frac{7}{2}t^2 + 9t \\ -\frac{7}{2}t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x(t) = (-7t^2 - 3t - 1)e^{2t}$$
$$y(t) = \left(-\frac{7}{2}t^2 + 9t\right) e^{2t}$$
$$z(t) = \left(-\frac{7}{2}t^2 + 2t + 2\right) e^{2t}$$

$$\left(\text{se } t=0 \text{ trovo } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{OK!} \right)$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} (-7t^2 - 3t - 1)e^{2t} + e^t \\ (-7/2\, t^2 + 9t)e^{2t} \\ (-7/2\, t^2 + 2t + 2)e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

DI FATTO, questi esempi ci danno tutte le possibilità in $\mathbb{R}^3$, se gli autovalori sono reali

VEDIAMO COME AVREMMO POTUTO TROVARE UNA $\bar{Y}$ mediante la formula

$$\bar{Y}(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B(\tau) d\tau = \otimes$$

Per questo ho bisogno dell'espressione di $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$

e quindi mi serve M^{-1} dove

$$M = \begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ -7 & 9 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ VIENE

$$M^{-1} = \frac{1}{343} \begin{bmatrix} -18 & -4 & -9 \\ -14 & 35 & -7 \\ -49 & -49 & 147 \end{bmatrix}$$

$49 \cdot 3 = 147$

$$\int_0^t M e^{(t-\tau)J} M^{-1} B(\tau)\, d\tau =$$

$$\int_0^t M e^{2(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) & \frac{(t-\tau)^2}{2} \\ 0 & 1 & (t-\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} e^{\tau} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$\int_0^t e^{2t-\tau} M \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) & (t-\tau)^2/2 \\ 0 & 1 & (t-\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} d\tau$$

Mi servono 3 integrali.

$$\int_0^t e^{2t-\tau}\, d\tau = e^{2t}\int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{2t}\left[-e^{-\tau}\right]_0^t = e^{2t}\left(1 - e^{t}\right)$$

$$= e^{2t} - e^{t} \leftarrow 1$$

$$\int_0^t e^{2t-\tau}(t-\tau)\, d\tau = \quad t-\tau = s \quad d\tau = -ds$$

$$= \int_0^t e^{t+s} s\, ds = e^t \int_0^t s e^s\, ds = e^t\left(\left[s e^s\right]_0^t - \int_0^t e^s ds\right) =$$

$$e^t\left(t e^t - e^t + 1\right) = t e^{2t} - t e^{t} + t \leftarrow 2$$

$$\int_0^t e^{2t-\tau}\frac{(t-\tau)^2}{2}\,d\tau \qquad s=t-\tau \quad ds=-d\tau$$

$$\frac{e^t}{2}\int_0^t s^2 e^s\,ds = \frac{e^t}{2}\left(\left[s^2 e^s\right]_0^t - \int 2s e^s\,ds\right) =$$

$$e^t\left(\frac{e^t s^2}{2} - \left[s e^s\right]_0^t + \int_0^t e^s\,ds = \left(e^t\frac{t^2}{2} - e^t t + e^t - 1\right)e^t =\right.$$

$$e^{2t}\frac{t^2}{2} - e^{2t}t + e^{2t} - e^t \leftarrow 3$$

NE SEGUE CHE

$$\bar{Y}(t) = \int_0^t e^{2t-\tau} M\begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) & (t-\tau)^2/2 \\ 0 & 1 & (t-\tau) \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} M^{-1}\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix} d\tau =$$

$$M\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} M^{-1}\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix} \leftarrow$$

(1) (2) e (3) sono gli integrali sopra

Questo $\bar{Y}$ è quello di prima + una Y_0 sol. dell'omogenea tale che $\bar{Y}(0)=0$

I pezzi con e^{2t} sono le sol. dell'omogenea.

È chiaro che questo giro è più complicato di quello precedente