Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 69 22/05/2025

Detto ciò – dato λ autov. – esistono $m_G(\lambda)$ catene

$(e_m \xrightarrow{B} e_{m-1} \to \dots \to e_1 \xrightarrow{B} 0 \quad \dots$ e ne sono $m_G(\lambda))$

tali che la somma delle loro lunghezze fa $m_A(\lambda)$

Quindi $V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{m_G}$ $\quad (n \ \dots)$

(ognuno di questi V è generato da una catena). In questo modo, usando queste catene come base di V_λ l'applicazione lineare indotta da A su V_λ si rappresenta con

$$J_\lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{m_G}} \end{bmatrix}}_{m_A(\lambda)} \Bigg\} m_A(\lambda)$$

ognuna di queste sottomatrici $J_1 \dots J_{m_G}$ è fatta come segue

$$J_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}}_{} \Bigg\} \text{lunghezza della catena } i\text{-esima}$$

Posso chiamare blocco di Jordan $J(\lambda, k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} \Big\} k$

NON HO ANCORA DETTO COME TROVARE QUESTE CATENE.

- FISSO λ e considero $m_A = m_A(\lambda)$, $m_G = m_G(\lambda)$
- Costruisco le potenze di $(A - \lambda I)$ e pongo

$m_k := \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k \qquad k=0\dots$

$m_0 = 0, \quad m_1 > 0, \qquad m_k \geq m_{k-1}$

- n è l'intero tale che $\quad m_{n-1} < m_n = m_A = m_k \quad \forall k \geq n$
- Chiamo $\delta_k := m_k - m_{k-1}$ (di quanto sale la dimensione)

$\delta_1 > 0 \quad \dots \quad \delta_n > 0 \qquad \delta_{n+1} = 0 = \delta_k \quad \forall k \geq n+1$

- Chiamo $X_k = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^k \qquad k = 0, \dots, n$

so che $X_{k-1} \subset X_k$. È chiaro che posso scrivere

$$X_k = X_{k-1} \oplus Y_k \qquad k \leq n$$

dove $\dim Y_k = \delta_k$

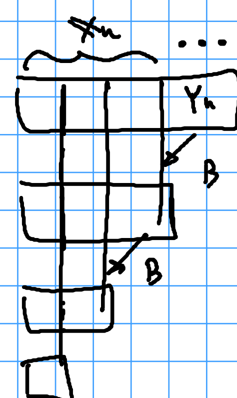
- Si può vedere (no dim. - non ci interessa da ciò che dico ora) che δ_k è decrescente

Prendo l'ultimo spazio X_n (che ha dim. m_A)

e lo divido in due: $X_n = X_{n-1} \oplus Y_n$ dove Y_n ha

dim $\delta_n > 0$. Prendo δ_n elementi lin. indip. in Y_n

$e_{1,n} \;\dots\; e_{\delta_n,n} \in X_n \setminus X_{n-1}$

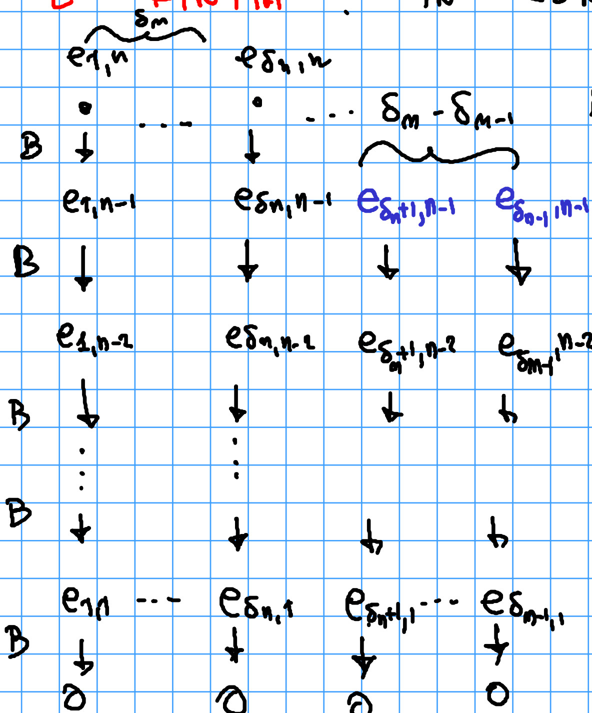


$\Rightarrow \quad Be_1 \dots Be_{\delta_n} \in X_{n-1} \setminus X_{n-2}$

e i loro l'applicazione di B COME NEL DIAGRAMMA

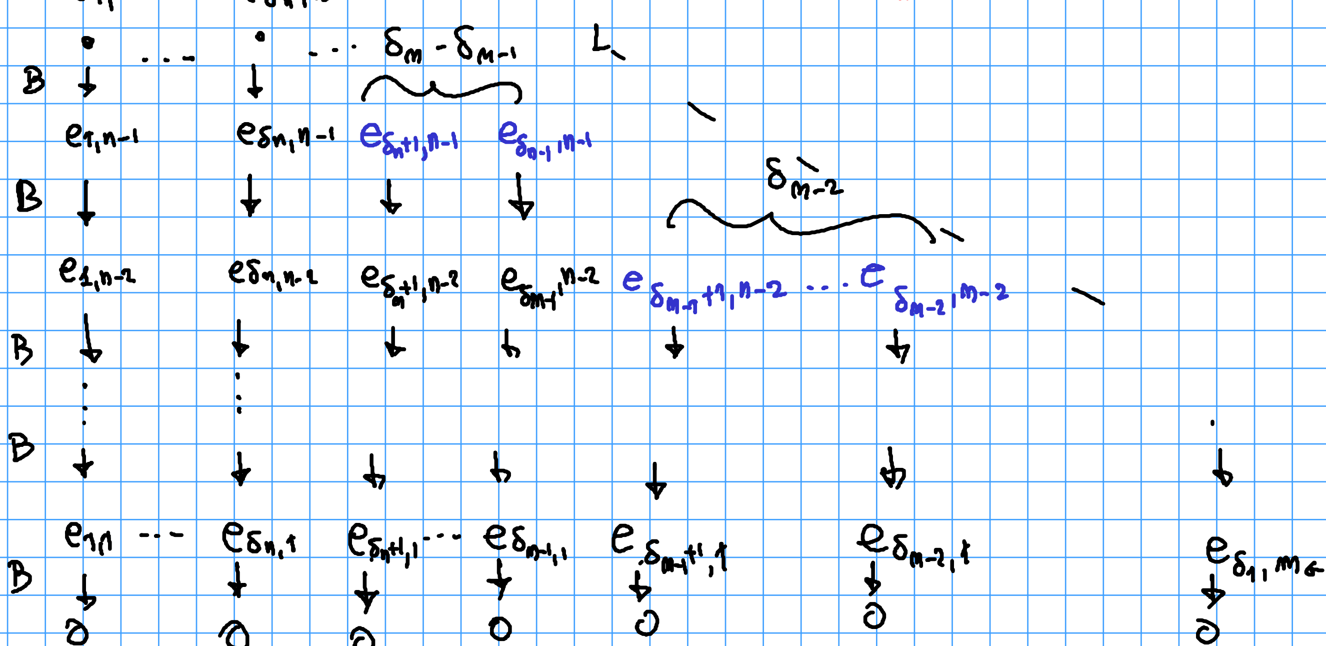
$$\begin{array}{cccl}
 & e_{1,n} & e_{\delta_n,n} & \in X_n \setminus X_{n-1} \\
B & \downarrow & \downarrow & \\
 & e_{1,n-1} & e_{\delta_n,n-1} & \in X_n \setminus X_{n-2} \\
B & \downarrow & \downarrow & \\
 & e_{1,n-2} & e_{\delta_n,n-2} & \\
B & \downarrow & \downarrow & \\
 & \vdots & \vdots & \\
B & \downarrow & \downarrow & \\
 & e_{1,1} & e_{\delta_n,1} & \in X_1 \setminus \{0\} \\
B & \downarrow & \downarrow & \\
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

HO COSTRUITO δ_m CATENE DI LUNGHEZZA n PERÒ NON È FINITA IN GENERALE.



LO SPAZIO $X_{n-1} < X_{n-2} \oplus \text{span}(Be_{1,n} \cdots Be_{\delta_m,n})$ ma potrebbe essere più grande. Dunque alla riga $n-1$ posso aggiungere $\delta_{m-1} - \delta_m$ vettori che insieme a X_{n-2} generano X_{n-1} (questo succede se $\delta_{m-1} > \delta_m$). Con questi vettori costruisco altre catene di lunghezza $n-1$

ITERO IL RAGIONAMENTO



PER QUESTA COSTRUZIONE È NECESSARIO TROVARE ESPLICITAMENTE TUTTI QUESTI $\ker(A-\lambda I)^q$ $q = 1 \dots m$

Se faccio queste operazioni per tutti gli autovalori, alla fine trovo $\lambda_1 \dots \lambda_k$ distinti e per ogni λ_i un certo numero $m_G(\lambda_i)$ catene. ORDINIAMO LE CATENE PER LUNGHEZZA DECRESCENTE e costruiamo la matrice M fatta come segue

$$M \; \underbrace{\Big[\; \underbrace{\quad\quad}_{\text{blocco } \lambda_1} \Big| \underbrace{\quad\quad}_{\text{blocco } \lambda_2} \Big| \quad \Big| \quad \Big| \underbrace{\quad\quad}_{\text{blocco } \lambda_k} \; \Big]}_{N} \Big\} N$$

e il blocco i-esimo è a sua volta:

$$M_i = \Big[\underbrace{\underbrace{e_{1,1} \xleftarrow{B} e_{1,2} \xleftarrow{B} \cdots \xleftarrow{B} e_{1,m}}_{\text{I° catena}} \Big| \underbrace{\quad}_{\text{II° catena}} \Big| \cdots \Big| \underbrace{\quad}_{m_G(\lambda_i) \text{ catena}}}_{m_A(\lambda} \Big] \Big\} N$$

Uso le catene per formare le colonne di M_i, e partire da $e_{1,i}$

In questo modo alla fine si ha

(*) $$A = M J M^{-1}$$ dove

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_k} \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \boxed{J(\lambda_i, m_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J(\lambda_i ..)} \end{bmatrix} \leftarrow m_G(\lambda_i) \text{ blocchi}$$

ORA DIAMO PER BUONO CHE ABBIAMO TROVATO LA DECOMPOSIZIONE SOPRA (*).

TORNIAMO AL PROBLEMA OMOGENEO

$$Y' = AY \qquad Y(0) = Y_0$$

Sappiamo che $Y(t) = e^{tA} Y_0$. Devo trovare e^{tA}

Da quanto visto si ha che:

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$$

Inoltre, se $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k) \Rightarrow e^{tA} = \mathrm{diag}(e^{tA_1} \cdots e^{tA_k})$

(l'abbiamo visto se A_i son numeri - ma è lo stesso ..)

ALLA FINE DEVO CALCOLARE $e^{tJ(\lambda, k)}$ dove

$$J(\lambda, k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} \Big\} k = \lambda I + B_k$$

dove $B_k = J(0, k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

Si vede subito che λI e B commutano $\Rightarrow$

$$e^{tJ(\lambda, k)} = e^{t(\lambda I + B_k)} = e^{t\lambda I} e^{tB_k} = \mathrm{diag}(e^{\lambda t}, \dots, e^{\lambda t}) \underbrace{e^{tB_k}}_{??}$$

Ricordo la definizione $e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n B_k^n$

Vediamo come sono le potenze $B_k \; B_k^2 \; B_k^3 \cdots B_k^n \cdots$

Si vede facilmente che

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad B_k^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad B_k^h = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} & \overset{h+1}{\downarrow} & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \end{array} \right] \Big\} k \end{array}$$

se $h \leq k-1$

$B_k^k = 0$. allora $B_k^h = 0 \; \forall h \geq k$

DUNQUE

$$e^{tB_k} = I + tB_k + \frac{t^2}{2} B_k^2 + \cdots \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} B^{k-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow e^{tB_k}$$

Alla fine $e^{tJ_k(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$

- QUESTO MI DICE COME RISOLVERE IL SISTEMA DI EQ. DIFF. OMOGENEO

VEDIAMO UN ESEMPIO

ESERCIZIO RISOLVERE

$$(S) \begin{cases} x' = -3x - 2z \\ y' = x - y + z \\ z' = 2x + z \end{cases}$$ con le condizioni iniziali

$X(0) = 0$, $Y(0) = -2$, $Z(0) = 1$ Se $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ diventa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Devo trovare la forma di Jordan di A.
- polinomio caratteristico: $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$-(1+\lambda) \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)\left((3+\lambda)(\lambda-1) + 4 \right) =$$

$$-(\lambda+1)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = -(\lambda+1)^3$$ $\leftarrow$ UN SOLO AUTOVALORE $\lambda = -1$

con $m_A = 3$

Consideriamo $B = (A - \lambda I) = A + I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

si vede che ha det $= 0$ (GIUSTAMENTE)

Quanto è la dimensione di Ker B ?? ← LA COSA PIÙ SEMPLICE È

TROVARE rank (B) = dimensione dell'immagine = numero di colonne/righe indip.

VEDO CHE LE DUE COLONNE NON NULLE SONO LIN. DIP (sono =)

$\Rightarrow$ rank (B) = 1 $\Rightarrow$ dim (Ker (B)) = 3-1 = 2 .

DA QUESTO OTTENGO CHE: $m_G(\lambda) = 2$. Inoltre so che

$\underbrace{3 \geq}_{\text{siamo in } \mathbb{R}^3} \dim \operatorname{Ker}(B^2) \underbrace{>}_{2 < m_A} 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} B^2$ ha dim 3 $\Leftrightarrow B^2 = 0$

CONTROLLATE SE VOLETE ..

DOVRÒ TROVARE <u>DUE CATENE</u> UNA DI LUNGHEZZA 1

e UNA DI LUNGHEZZA 2.

METODO SBAGLIATO : TROVO DUE autovettori e_1 e_2 ($\in$ Ker B) INDIPENDENTI e

cerco e_3 : $Be_3 = e_1$ oppure $Be_3 = e_2$ IN GENERALE NON

FUNZIONA. NON È DETTO CHE io riesca a trovare e_3

DEVO PARTIRE DA e_3 (come della prima)

CON LE NOTAZIONI DI PRIMA $m_1 = 2$ $m_2 = 3 = m_A$

$\delta_1 = 2$ $\delta_2 = 1$

DEVO TROVARE UN (solo) $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} B$

In altri termini mi serve $e_3 \in \mathbb{R}^3$ con $Be_3 \neq 0$

Provo a vedere se $e_3 = Y_0$ va bene :

$$B Y_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

<u>OK</u> Prendo $e_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B}$. Prendo $e_2 = Be_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Ker} B \setminus \{0\}}$

(e_2 è un autovettore)

Ho una catena di lunghezza 2. MANCA $e_1 \in \operatorname{Ker}(B)$ t.c.

e_1 e e_2 siano lin. indip. Se $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la condizione $Be_1 = 0$

mi dà $\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $x = -z$ y arbitrario

$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha determ. $2 \neq 0$

Posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che è indip da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

DUNQUE POSSO prendere $M = [\underbrace{e_2 \mid e_3}_{\text{catena}} \mid \underbrace{e_1}_{\text{catena}}]$ $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = MJM^{-1}$ (dove calcolare M^{-1} se voglio e^{tA})

Cerco $Y(t) = e^{tA}Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} e_3$

(HO AVUTO FORTUNA NEL POTER PRENDERE $e_3 = Y_0$)

Noto che $M\hat{e}_2$ = seconda colonna di $M = e_3 \iff M^{-1}e_3 = \hat{e}_2$

$\Rightarrow Y(t) = M e^{tJ} \hat{e}_2 = M e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-t} M \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$e^{-t} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_2 & e_3 & e_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2t \\ t-2 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$

$x(t) = -2te^{-t}$
$y(t) = (t-2)e^{-t}$
$z(t) = (2t+1)e^{-t}$

$\begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = -2 \\ z(0) = 1 \end{pmatrix}$

FACCIAMO LA VERIFICA!

$x'(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t} = (2t-2)e^{-t}$

$y'(t) = e^{-t} - (t-2)e^{-t} = (3-t)e^{-t}$

$z'(t) = 2e^{-t} - (2t+1)e^{-t} = (1-2t)e^{-t} \leftarrow$

$-3x(t) - 2z = 6te^{-t} - 2(2t+1)e^{-t} = (2t-2)e^{-t} = x'(t)$ ok

$x(t) - y(t) + z(t) = e^{-t}(-2t - t + 2 + 2t + 1) = (3-t)e^{-t} = y'(t)$ ok

$2x(t) + z(t) = e^{-t}(-4t + 2t + 1) = (1-2t)e^{-t} = z'(t)$ ok

CASO NON OMOGENEO

(S) $Y' = AY + B(t)$ MI SERVE UNA SOL. PARTICOLARE $\bar{Y}(t)$!!!

IN MOLTI CASI LA $\bar{Y}$ si trova a occhio ...

Però esiste una formula generale che è la seguente:

$$\bar{Y}(t) = \int_0^t \underbrace{e^{(t-\tau)A} B(\tau)}_{\text{vettore}} d\tau = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau$$

Vediamo che $\bar{Y}$ è sol. di (S). Facciamo la derivata di $\bar{Y}(t)$

(uso la derivata del prodotto - andrebbe giustificato al corso modificato...)

$$\bar{Y}'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right) \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau + e^{tA} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau\right) =$$

TEOR. FOND. CALCOLO

$$\underbrace{A e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau}_{\bar{Y}(t)} + e^{tA}\left(e^{-tA} B(t)\right) =$$

$$A\bar{Y}(t) + B(t) \qquad \left(e^{tA} e^{-tA} = e^{tA-tA} = e^0 = I\right)$$

DUNQUE $\bar{Y}$ risolve (S). NOTA $\bar{Y}(0) = 0$

$\bar{Y}(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau$ è la sol. di (S) con dato iniziale NULLO !!

DUNQUE LA SOL. DI $\begin{cases} Y' = AY + B(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ è data da

$$e^{tA} Y_0 + \bar{Y}(t) = e^{tA}\left(Y_0 + \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau) d\tau\right)$$

OSS. TUTTO QUESTO SI PUÒ FARE IN $\mathbb{C}$ (nel caso in cui $P(\lambda)$ abbia radici complesse.

Se A è a coeff. reali $\Rightarrow$ gli autovalori si presentano in coppie coniugate (con la stessa molteplicità). Inoltre anche gli autovettori - generalizzati compaiono in coppie coniugate. SI POTREBBE ALLORA METTERE INSIEME I BLOCCHI CORRISPONDENTI OTTENENDO UNA "FORMA DI JORDAN REALE" (in cui i blocchi son più complicati)

SE $N=3$ L'UNICO CASO CHE PUÒ PRESENTARSI È quello

in cui ci son 1 autovalore reale λ_1 e una coppia $a \pm bi$

che hanno molt. algebrica $= 1$ $(m_g = 1) \Longrightarrow$ La matrice è

diagonalizzabile in $\mathbb{C}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a+ib & 0 \\ 0 & 0 & a-ib \end{pmatrix} \qquad e_1 \quad e_2 \quad \bar{e}_2$$

Con dei semplici calcoli si scrivono le sol complesse e accoppiandole

opportunamente si trovano combinazioni REALI di $\underbrace{e^{\lambda_1 t} e_1}$

$e^{at} \, Re \, e_2 \cos(bt)$ $\qquad e^{at} \, Im \, e_2 \sin(bt)$

QUESTO CONCLUDE IL PROGRAMMA