Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 68   21/05/2025

Forma di Jordan A matrice $N \times N$.

λ autovalore (radice del pol. caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$)

So che $\exists\, n_\lambda \geq 1$ tale che

$$\ker(A-\lambda I)^{n_\lambda - 1} \subsetneq \ker(A-\lambda I)^{n_\lambda} = \ker(A-\lambda I)^{n_\lambda + 1}$$

n_λ è l'indice n per cui $\ker(A-\lambda I)^n$ "si stabilizza"

- Chiamo $\mathbb{X}_\lambda = \ker(A-\lambda I)^{n_\lambda}$. VALE CHE:

  - Se $\lambda \neq \mu$ $\quad \mathbb{X}_\lambda \cap \mathbb{X}_\mu = \{0\}$
  - $A(\mathbb{X}_\lambda) = \mathbb{X}_\lambda$: $\mathbb{X}_\lambda$ è un "autospazio per A"
  - $\dim \mathbb{X}_\lambda = m_A(\lambda) \leftarrow$ molteplicità algebrica di λ

Mentre $m_G(\lambda) = \dim(\ker(A-\lambda I))$ (per definizione: $m_G(\lambda)$ è il numero di autovettori lin. indip.) $\quad (m_G(\lambda) \leq m_A(\lambda))$

DA QUESTI FATTI POSSO DIRE CHE, se per ogni λ prendo una base $\underbrace{e_{1,\lambda} \dots e_{m_A(\lambda),\lambda}}_{m_A(\lambda) \text{ elementi}}$, e li metto tutti insieme (nell'ordine giusto $\underbrace{\quad}_{\lambda_1} \underbrace{\quad}_{\lambda_2} \dots \underbrace{\quad}_{\lambda_k}$) trovo una base di $\mathbb{R}^N$ rispetto alla quale A diventa del tipo

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \; J_k \end{pmatrix}$$

dove ogni J_i è una matrice $m_A(\lambda_i) \times m_A(\lambda_i)$ $\quad$ (k = numero di autovalori distinti) perché A manda $\mathbb{X}_{\lambda_i}$ in $\mathbb{X}_{\lambda_i}$

ORA VOGLIO SCEGLIERE LA BASE IN $\mathbb{X}_{\lambda_i}$ in modo che J_{λ_i} abbia una struttura particolare.

- Ricordiamo che gli elementi di $\mathbb{X}_{\lambda_i}$ si chiamano "autovettori generalizzati". Potrei definire anche:

  e è autovettore generalizzato di ordine r se $(A-\lambda_i)^r e=0$ ma $(A-\lambda_i)^{r-1} e \neq 0$

(dunque e è autovettore se ha ordine 1)

DUNQUE ORA MI PROPONGO DI SCEGLIERE UNA OPPORTUNA BASE DI "AUTOVETTORI GENERALIZZATI"

D'ORA IN POI FISSO UN autovalore λ_i e lo chiamo λ

CHIAMO $B=(A-\lambda I)$

- Se r intero. Chiamo "catena di autovettori generalizzati di lunghezza r" una r-upla di elementi $e_1\ e_2 \cdots e_r$ in $\mathbb{X}_\lambda$ tali che:

$$\boxed{0=e_1=Be_1,\quad e_2=Be_3,\ \cdots\quad e_{r-1}=Be_r}$$

$$e_r \xrightarrow{B} e_{r-1} \xrightarrow{B} \cdots \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} e_1$$

$\Rightarrow\quad 0\neq e_1=Be_2=B^2e_3=\cdots=B^{r-1}e_r$ e

$Be_1=B^re_r=0$ $\left(\Rightarrow e_1 \text{ è un autovettore e ogni } e_i \text{ è autovettore gen. di ordine } i\right)$

N.B. $r\leq n_\lambda - 1$ (so che $\mathbb{X}_\lambda = \mathrm{Ker}\, B^{n_\lambda}$

- Se $e_1 \cdots e_r$ è una catena $\Rightarrow$ $e_1 \cdots e_r$ son lin. indip. (no dim.)

- Se $e_1 \cdots e_r$ è una catena, e se chiamo $\tilde{\mathbb{X}}=\mathrm{span}(e_1 \cdots e_r)$ noto che $A:\tilde{\mathbb{X}}\to\tilde{\mathbb{X}}$ (si vede facilmente)

- Se uso questa base $e_1 \cdots e_r$ su $\tilde{\mathbb{X}}$ la matrice che rappresenta la restrizione di A a $\tilde{\mathbb{X}}$ è fatta così

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Infatti $A e_1 = \lambda e_1 \quad (B e_1 = 0)$

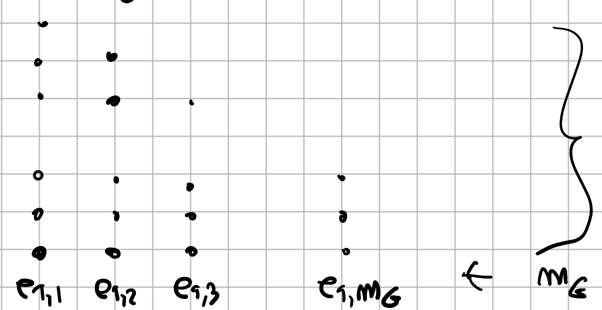
$A e_2 = \lambda e_2 + e_1 \quad (B e_2 = e_1 \leftrightarrow A e_2 - \lambda e_2 = e_1)$

$\vdots$

$A e_r = \lambda e_r + e_{r-1}$

Def. Dico che una catena $e_1 \dots e_r$ è massimale se non è possibile trovare e_{r+1} tale che $B e_{r+1} = e_r$.

Lemma Se $m_G = m_G(\lambda)$ allora si possono trovare m_G catene massimali in X_λ tali che la somma delle lunghezze di queste catene fa $m_A(\lambda)$ e tali che tutti questi vettori sono lin. indip.



ci sono m_A vettori lin. indip

$\leftarrow$ m_G AUTOVETTORI

Da questo lemma segue che – se uso queste catene come base

- GENERO TUTTO X_λ
- LA matrice J_λ è fatta così:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_{m_G} \end{pmatrix}$$

m_G blocchi del tipo

$$J_R = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ho fattorizzato X_λ in m_G sottospazi $X_{\lambda,1} \cdots X_{\lambda,m_G}$ ognuno dei quali contiene un solo autovettore ed è generato da una catena