Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 67 19/05/2025

- A matrice $N \times N$. Stiamo considerando il problema <u>lineare</u> <u>omogeneo</u>

$$(P.L)_{Y_0} \quad \begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

dove $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ (potrei mettere $Y(t_0) = Y_0$ per $t_0 \in \mathbb{R}$ assegnato, per semplicità considero $t_0 = 0$)

Dal teorema generale so che $(P.L.)_{Y_0}$ ha un'unica sol. definita su <u>tutto $\mathbb{R}$</u>

- Abbiamo definito l'esponenziale di A:

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \qquad \text{(proprietà viste l'altra volta)}$$

- Poniamo $W(t) := e^{tA}$ che è una funzione $W : \mathbb{R} \to M(N \times N)$

Allora W verifica

$$W(0) = I \quad (I = \text{matrice identica}) \quad \text{e} \quad W'(t) = AW(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

<u>Dim</u> $W(0) = I$ è ovvio dalla def. ($e^0 = I$). Per la seconda eguaglianza consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{1}{h}\left(W(t+h) - W(t)\right) = \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \frac{1}{h}\left(e^{tA + hA} - e^{tA}\right) =$$

(proprietà dell'esponenziale - N.B. e^{tA} commuta con e^{hA} e si vede)

$$= \frac{1}{h}\left(e^{tA} e^{hA} - e^{tA}\right) = \frac{1}{h} e^{tA}\left(e^{hA} - I\right) =$$

$$\frac{1}{h} e^{tA}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}A^n - I\right) = \frac{1}{h} e^{tA}\left(\cancel{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}A^n - \cancel{I}\right) \underset{\uparrow}{=}$$

$$\frac{1}{h} e^{tA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} A^{n+1} =$$

(traslazione dell'indice)

e^A commuta con A (!)

$$\frac{1}{\cancel{h}} e^{tA} \cancel{h} A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A^n}{(n+1)!} = A e^{tA}\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{(n+1)!}\right) =$$

(cambio di indice)

$$A e^{tA}\left(I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+2)!} A^{n+1}\right) =$$

$$A e^{tA}\left(I + hA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hA)^n}{(n+2)!}\right)$$

RIASSUMENDO

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} = A e^{tA}\left(I + hA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hA)^n}{(n+2)}\right)$$

Si vede che la serie $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hA)^n}{(n+2)!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \|A\|^n}{(n+2)!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{(n+1)!} < +\infty$

(niente modici!) se $|h| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = A e^{tA} (I + 0) = A e^{tA}$$

Vediamo che e^{tA} e A commutano:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{A\, t^n A^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right) A$$

Da qui segue anche che e^{tA} e e^{hA} commutano (con un po' di pazienza)

#

Ho TROVATO che $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

<u>CONSEGUENZA</u> La <u>soluzione</u> del problema $(P.L.)_{Y_0}$ è data da:

$$\boxed{Y(t) := e^{tA} Y_0}$$

Infatti $Y(0) = e^{0A} Y_0 = Y_0$ e $\frac{d}{dt}\left(e^{tA} Y_0\right) = \left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right) Y_0 = \left(A e^{tA}\right) Y_0$

$= A Y(t)$.

D'altra parte la soluzione è unica $\Rightarrow$ è quella che ho "trovato"

• A QUESTO PUNTO IL PROBLEMA DIVENTA QUELLO DI CALCOLARE ESPLICITAMENTE e^{tA}

Si tratta di un problema (complicato) di algebra lineare.

Andiamo per gradi

LEMMA 1 Se M è una matrice invertibile e A è una matrice $\Rightarrow$

$$e^{MAM^{-1}} = M e^{A} M^{-1}$$

Infatti:

$$e^{MAM^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(MAM^{-1})^n}{n!} = (*)$$

Ma

$$(MAM^{-1})^n = \underbrace{(MA\cancel{M^{-1}})(\cancel{M}A\cancel{M^{-1}})\cdots(\cancel{M}AM^{-1})}_{n \text{ volte}} = M A^n M^{-1} \Rightarrow$$

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M A^n M^{-1}}{n!} = M\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) M^{-1} = M e^{A} M^{-1}$$

#

IL LEMMA MI DICE CHE per calcolare e^{A} posso cercare una M per la quale MAM^{-1} è "più semplice", nel senso che l'esponenziale di MAM^{-1} si calcola più facilmente.

TRA I "CASI SEMPLICI" quello più favorevole è quello in cui A è diagonalizzabile, cioè

$$A = M D M^{-1}$$

dove M è invertibile e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$

In questo caso l'esponenziale di D si trova subito:

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1^n}{n!}, \ldots, \frac{\lambda_N^n}{n!}\right) =$$

$$\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!},\dots,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_N^n}{n!}\right) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_N}\right)$$

CIOÈ
$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

SE PER ESEMPIO A è simmetrica so che è diagonalizzabile e che $M^{-1} = M^t$, perché c'è una base di autovettori ortogonali, i cui corrispondenti autovalori sono reali - NON NECESSARIAMENTE DISTINTI!

lo posso trovare così

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Cerchiamo tutte le soluzioni

In questo caso $N=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ che è simmetrica.

Voglio "diagonalizzare" A. Devo trovare autovalori / autovettori di A.

Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) - 1$

$= \lambda^2 - 2$. Dunque $\lambda_1 = \sqrt{2}$ $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Ne segue che

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Mi servono anche gli autovettori. Se considero $\lambda_1 = \sqrt{2}$ cerco $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che

$$(A - \sqrt{2}I)e_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \boxed{y = (\sqrt{2}-1)x}$ (oppure $x = (\sqrt{2}+1)y$)

Per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$. Per trovare e_2 autovettore rel. a λ_2

(potrei rifare i calcoli con λ_2, ma) posso prendere e_2 ortogonale a e_1

Per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$. OSSERVO CHE $\|e_1\|^2 = 1 + (\sqrt{2}-1)^2$ e $\|e_2\|^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (-1)^2$ sono eguali

$\|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = 2+1-2\sqrt{2}+1 = 4-2\sqrt{2}$

Ne segue che $MM^t = [e_1 | e_2] \left[\dfrac{e_1^t}{e_2^t}\right] = \begin{bmatrix} \|e_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|e_2\|^2 \end{bmatrix} =$

$(4-2\sqrt{2}) I \iff M^{-1} = \dfrac{1}{4-2\sqrt{2}} M^t = \dfrac{1}{4-2\sqrt{2}} M$ cioè

$$\underbrace{M = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix}} \qquad M^{-1} = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice mi dona che $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ sono i versori canonici

$M\hat{e}_i = e_i \Rightarrow M^{-1} e_i = \hat{e}_i$. Allora

$$(M^{-1} A M)\hat{e}_i = M^{-1} A e_i = M^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i \hat{e}_i$$

CIOÈ $\quad M^{-1} A M = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \iff A = M D M^{-1}$

(REGOLA: A simmetrica. dove λ_i e e_i autovalori / autovettori definiso $M = [e_1 | \cdots | e_N]$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$. Allora

$$A = M D M^{-1}$$
)

Tornando a noi abbiamo che

$$e^{tA} = e^{M(tD)M^{-1}} = M e^{tD} M^{-1} = M \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) M^{-1}$$

$$\frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} & -e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)^2 e^{-\sqrt{2}t} & (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} & (\sqrt{2}-1)^2 e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 2+1-2\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}+(3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}, & (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}-(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}-(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}, & (3-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}$$

Mettiamo di dover risolvere il sistema con condizione iniziale

$x(0)=1 \qquad y(0)=0 \quad \Rightarrow$

$$Y(t) = e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}t}+(3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

Se calcolo $Y(0)$ trovo $\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+3-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ OK

$$Y'(t) = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}\right.\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}+(4-3\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ (2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}+(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}\end{pmatrix}$$

SONO EGUALI

$$AY(t) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}t}+(3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)\left(e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)\end{pmatrix} =$$

TORNA

$$\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\cancel{1}+\sqrt{2}\cancel{-1})e^{\sqrt{2}t}+(3-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} \\ (1-\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+(3-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}+(4-3\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ (2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}+(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}\end{pmatrix}$$

DUNQUE SE TROVO $D=\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ e M invertibile t.c. $A = M D M^{-1}$ $\Rightarrow$

$$e^{tA} = M\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t}\right)M^{-1}$$

PURTROPPO NON TUTTE LE MATRICI SONO DIAGONALIZZABILI ☹

Per trattare il caso generale serve la "FORMA DI JORDAN" di A.

OSS. · λ è autovalore di $A \iff \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$

· e è autovettore di A di autovalore $\lambda \iff e \neq 0$, $e \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$

Vediamo cosa è la forma di Jordan e come ci si arriva ...

Sia A matrice $N \times N$ e sia λ un autovalore (lo suppongo reale - si può fare l'analogo nel caso $\lambda \in \mathbb{C}$, ma nel nostro caso avremo sempre $\lambda \in \mathbb{R}$). So che λ è radice di $p(\xi) = \det(A - \xi I)$

e dunque $p(\xi) = (\xi-\lambda)^{m} p_1(\xi)$ dove $p_1(\lambda) \neq 0$. ($m = m_A =$ "molteplicità algebrica" di λ $=: m_A(\lambda)$)

So che $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$. Se sapessi che $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ ha dimensione $m \iff$ troverei $e_1 \dots e_m$ autovettori lin. indip. Se questa condizione (fortunata) valesse per ognuna delle radici di $p(\xi) \Rightarrow$ troverei una base di autovettori per A

(N = grado di $p(\xi)$ = somma delle molteplicità algebriche)

$\iff$ posso diagonalizzare A.

QUESTO È VERO (BANALMENTE) se $p(\xi)$ ha solo radici semplici (di molteplicità $m=1$)

IN GENERALE PERÒ la $\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda I)) =: m_G(\lambda)$ (molteplicità GEOMETRICA DI λ) è $\leq m_A(\lambda)$

E QUESTO È IL PROBLEMA !!

- Chiamo B (che dal λ che sto considerando) $B := A - \lambda I$

e considero le potenze di B: $B^0 = I$, $B^1 = B$, B^2, $B^3 \dots$

OSS. $\operatorname{Ker} B^{n+1} \supset \operatorname{Ker} B^n$. Infatti se $e \in \operatorname{Ker} B^n \Rightarrow$

$B^n e = 0 \Rightarrow B(B^n e) = 0 \Rightarrow B^{n+1} e = 0$ DUNQUE

$1 \le \dim \operatorname{Ker} B^n \le \dim \operatorname{Ker} B^{n+1} \le N \qquad n \ge 1$

DUNQUE per un qualche $n = n_\lambda$ deve essere $\operatorname{Ker} B^n = \operatorname{Ker} B^{n+1}$

e dunque $\operatorname{Ker} B^n = \operatorname{Ker} B^{n_\lambda} \quad \forall n \ge n_\lambda$

FATTO $\dim (\operatorname{Ker} B^{n_\lambda}) = m_A(\lambda)$ (NO DIM.)

(se $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$ allora $n_\lambda = 1$)

Def. Se $e \in \operatorname{Ker} B^n$ dico che e è un "autovettore generalizzato". Dico che $\operatorname{Ker} B^n$ è un "autospazio generalizzato"

Nota che A manda punti di $\operatorname{Ker} B^{n_\lambda}$ in sé (LO VEDIAMO)