Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 66 15/05/2025

Problema di Cauchy $\qquad F: \Omega \to \mathbb{R}^N \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$(t, Y) \quad t \in \mathbb{R}, \ Y \in \mathbb{R}^N$

$$(P.t_0.Y_0) \qquad \begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Voglio fare alcune dim. ho quelle dette ieri per far capire come entra l'ipotesi di Lipschitz:

UNICITÀ della sol. $Y(t)$. Supponiamo che ci siano due soluzioni $Y_1, Y_2 :]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$, $\delta>0$. Poniamo

$$m(t) = \| Y_2(t) - Y_1(t) \|^2 \qquad (m:]t_0-\delta, t_0+\delta[\to [0, +\infty[)$$

$$m'(t) = 2\,(Y_2(t) - Y_1(t)) \cdot (Y_2'(t) - Y_1'(t)) = \qquad (\text{si usa l'eq.})$$

$$= 2\,(Y_2(t) - Y_1(t)) \cdot (F(t, Y_2(t)) - F(t, Y_1(t)))$$

$$\Rightarrow m'(t) \leq 2\, \|Y_2(t) - Y_1(t)\| \, \|F(t, Y_2(t)) - F(t, Y_1(t))\| \leq \boxed{(\text{IPOTESI SU } F)}$$

$$\leq 2\, \|Y_2(t) - Y_1(t)\| \cdot L \cdot \|Y_2(t) - Y_1(t)\| = 2L\, m(t)$$

HO TROVATO DUNQUE $\quad m' \leq 2L\, m \quad$ (IDEA: DIVIDO PER m e integro - però non sono sicuro se divido per zero..)

Moltiplico da entrambi i lati per e^{-2Lt} $\Rightarrow$

$$\underbrace{m' e^{-2Lt} - m(t) 2L e^{-2Lt}}_{\frac{d}{dt} m(t) e^{-2Lt}} \leq 0 \implies m(t) e^{-2Lt} \leq m(0) e^{2Lt_0} = m(0)$$

se $t \geq t_0$

Ma $m(t_0) = \| Y_2(t_0) - Y_1(t_0) \|^2 = \| Y_0 - Y_0 \|^2 = 0$

DUNQUE $\forall t \geq t_0 \quad \| Y_2(t_0) - Y_1(t_0) \|^2 \leq 0 \implies Y_2(t) = Y_1(t_0)$ se $t \geq t_0$

IN MANIERA SIMILE si trova che anche $Y_1(t) = Y_2(t_0)$ se $t \leq t_0$

DUNQUE $Y_2 = Y_1$ su $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ UNICITÀ

VENIAMO AL "CASO LINEARE"

IL PROBLEMA DIVENTA:

$$(PL, t_0, Y_0): \begin{cases} Y' = A(t) Y + B(t) & \text{in } I \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

DOVE $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto), $A : I \to \text{Matrici}(N \times N)$, $B : I \to \mathbb{R}^N$, A, B continue, $t_0 \in I$ $Y_0 \in \mathbb{R}^N$

(PL) è un caso particolare di (P). IN QUESTO CASO si usa

$$F(t, Y) = A(t) Y + B(t)$$

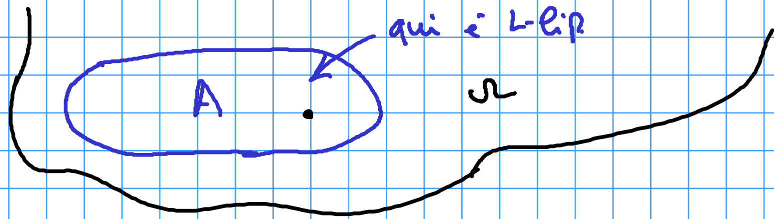
C'È DA FARE UNA PICCOLA GENERALIZZAZIONE RIGUARDO A (P)

IN EFFETTI per avere il teorema di Cauchy basta che F sia solo "localmente" lipschitziana in Y unif in t cioè che

IPOTESI INDEBOLITA per ogni $A \subset \Omega$ limitato e chiuso $\exists L$ t.c.

$$\| F(t, Y_2) - F(t, Y_1) \| \leq L \| Y_2 - Y_1 \|$$

L dipende da A



È chiaro che il teorema vale ancora dato che il risultato del teorema "è locale": se parto da (t_0, Y_0) mi basta che l'ipotesi valga in una pallina di centro (t_0, Y_0)

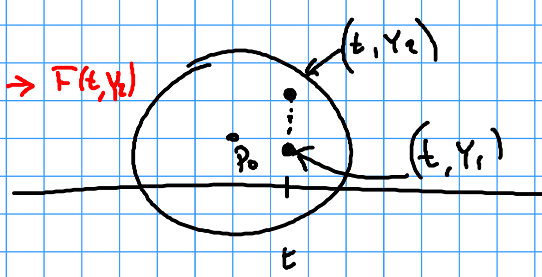
- COME CONSEGUENZA DI QUESTO "INDEBOLIMENTO" ho che

se $F(t,Y)$ è C^1 rispetto a Y $\Longleftrightarrow$

$\exists \dfrac{\partial}{\partial y_i}(t, y_1 \cdots y_N)$ continue in $(t, y_1 \cdots y_N)$ $\Rightarrow$

vale l'ipotesi indebolita: se $P_0 = (t_0, Y_0)$ e $A = B(P_0, r)$

con $r > 0$ t.c. $A \subset \Omega$ $\Rightarrow$



$$F(t, Y_2) - F(t, Y_2) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \overbrace{F(t, Y_1 + s(Y_2 - Y_1))}^{s=0 \to F(t,Y_1) \quad s=1 \to F(t,Y_2)} ds$$

$$= \int_0^1 \big(J_F(t, Y_1 + s(Y_2 - Y_1))\big)(Y_2 - Y_1)\, ds \le \int_0^1 \underbrace{\| J_F(t, Y_1 + s(Y_2 - Y_1)) \|}_{\text{limitata da una costante dato che } J_F \text{ è continua (WEIERSTRASS)}} \| Y_2 - Y_1 \| \, ds$$

Jacobiano rispetto a Y - t è un parametro

$$\le \text{costante} \, \| Y_2 - Y_1 \|$$

#

TORNIAMO AL CASO LINEARE:

$$F(t,Y) = A(t)\,Y + B(t) \qquad Y \in \mathbb{R}^N \qquad t \in \,]a, b[$$

dove $-\infty \le a < b \le +\infty$

Se prendo $-\infty < \bar{a} < \bar{b} < +\infty$ con $[\bar{a}, \bar{b}] \subset \,]a, b[$

so che $\|A(t)\|$ (NORMA MATRICIALE) $\big($e $\|B(t)\|\big)$ hanno massimo su $[\bar{a}, \bar{b}]$

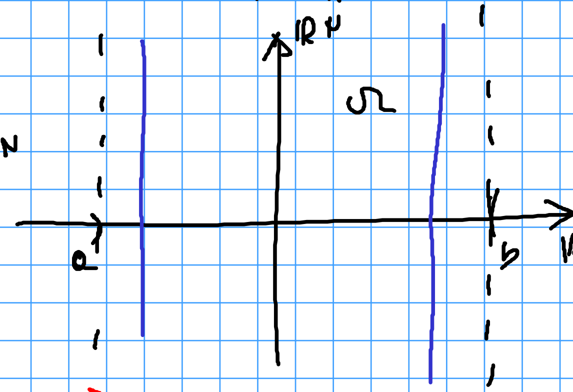
(Weierstrass)

⇒ Se $t \in [0,b]$, $Y_2, Y_1 \in \mathbb{R}^N$

$$\|F(t,Y_2) - F(t,Y_1)\| = \|A(t)Y_2 + \cancel{B(t)} - A(t)Y_1 - \cancel{B(t)}\| =$$

$$\|A(t)(Y_2-Y_1)\| \le \|A(t)\|\,\|Y_2-Y_1\| \le \text{cost.}\,\|Y_2-Y_1\|$$

| dato che t varia in $[\bar a,\bar b]$



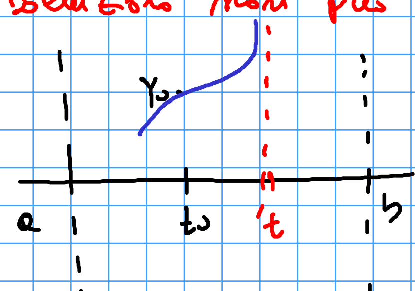
NOTA in questo caso $\Omega =]0,b[\times \mathbb{R}^N$

La F è lipschitziana su ogni $[\bar a,\bar b]\times\mathbb{R}^N$

(In generale non è lip. su $]0,b[\times\mathbb{R}^N$ MA lo è su ogni $[\bar a,\bar b]\times\mathbb{R}^N$ con $[\bar a,\bar b]$ limitato e contenuto in $]0,b[$

DUNQUE IL CASO LINEARE È UN CASO PARTICOLARE DEL PROBLEMA GENERALE ⇒ VALE IL T. DI CAUCHY

Vediamo ora che - nel caso lineare - la soluzione non può "esplodere in tempo finito"



← NO

TEOREMA L'intervallo massimale (per ogni t_0, Y_0) è l'intervallo $I =]0,b[$

DUNQUE la sol è definita su tutto $]a,b[$

IN ALTRI TERMINI LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA LINEARE HANNO I come intervallo massimale di esistenza

IDEA DI DIM Sia $]\underline{t},\bar t[$ l'intervallo massimale.

Supponiamo che $\bar t < a$. Si ha che

NORMA MATRICIALE

$\|A(t)\| \le K$ per $t_0 \le t \le \bar t$

$\|B(t)\| \le K$

NORMA IN $\mathbb{R}^N$

(Weierstrass) Pongo $m(t) = \|Y(t)\|^2$ per $t \in [t_0,\bar t[$

$$m'(t) = 2Y(t)\,Y'(t) = 2Y(t)\Big(A(t)Y(t) + B(t)\Big) \leq$$

$$2\,\|Y(t)\|\Big(\|A(t)\|\,\|Y(t)\| + \|B(t)\|\Big) \leq$$

$$2\,\|Y(t)\|\Big(k\,\|Y(t)\| + K\Big) = 2K\Big(\|Y(t)\|^2 + \|Y(t)\|\Big) \leq$$

$$1 \cdot \|Y\| \leq \frac{1^2 + \|Y\|^2}{2}$$

$$2K\left(\|Y(t)\|^2 + \frac{\|Y(t)\|^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq$$

$$K\Big(3\,\|Y(t)\|^2 + 1\Big) \leq 3K\Big(m(t) + 1\Big)$$

$$m' \leq 3K(m+1) \Rightarrow \frac{d}{dt}(m+1) \leq 3K(m+1)$$

ragionando come nella prima dim (unicità) (ORA NON HO PROBLEMI A DIVIDERE)

$$\frac{\frac{d}{dt}(m(t)+1)}{m(t)+1} \leq 3K \quad \text{INTEGRO TRA } t_0 \text{ e } t$$

$$\frac{d}{dt} \ln(m(t)+1)$$

$$\ln(m(t)+1)\Big|_{t_0}^{t} \leq 3K(t-t_0) \iff$$

$$\frac{m(t)+1}{m(t_0)+1} \leq e^{3K(t-t_0)} \Rightarrow m(t)+1 \leq (m(t_0)+1)\,e^{3K(t-t_0)}$$

$$\leq (m(t_0)+1)\,e^{3K(\bar{t}-t_0)}$$

$$\Rightarrow \underset{\|Y(t)\|^2}{\overset{\|}{m(t)}} \leq \text{costante} \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}[$$

DUNQUE $Y(t)$ è limitato x $t \in [t_0, \bar{t}[$

$\Rightarrow$ NON VALE NÉ la (1) né la (2) né la (3) delle possibilità dette per l'intervallo massimale

---

NEL CASO LINEARE $Y(t)$ è ben definita fino a che

|| sono definiti $A(t)$ e $B(t)$

PROPRIETÀ "DI STRUTTURA" DELLE SOLUZIONI DI (PL)

(PL) $\quad Y' = A(t)Y + B(t)$ (senza condizioni iniziali)

(PLO) $\quad Y' = A(t)Y$ (PROBLEMA OMOGENEO)

Chiamo $\mathcal{S} = \{ Y :]a,b[\to \mathbb{R}^N , Y$ risolve (P.L) $\}$

$\mathcal{S}_0 = \{ Y :]a,b[\to \mathbb{R}^N , Y$ risolve (P.L.O) $\}$

TEOREMA (a) $\mathcal{S}_0$ è uno spazio lineare :

se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow \lambda Y_1 + \mu Y_2 \in \mathcal{S}_0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{S}_0$ ha dimensione N

(c) Supponiamo che $\bar{Y} \in \mathcal{S}$. Allora

$Y \in \mathcal{S} \iff Y - \bar{Y} \in \mathcal{S}_0$ $\left(\Rightarrow Y = Y_0 + \bar{Y}\right.$ dove $Y_0 = Y - \bar{Y}$ e' sol. di (PLO) $\left.\right)$

LO DIMOSTRIAMO E CONTEMPORANEAMENTE PRECISIAMO IL SIGNIFICATO (della (b) SOPRATTUTTO)

DIM. (a) (semplice) Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora

$$\frac{d}{dt}(\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda Y_1' + \mu Y_2' = \lambda A(t) Y_1 + \mu A(t) Y_2 =$$

$$A(t)(\lambda Y_1 + \mu Y_2)$$

(b) La (b) significa che

(1) esistono $Y_1 \cdots Y_N$ soluzioni di (PLO) tra di loro linearmente indipendenti

(2) Ogni altra Y sol di (PLO) è combinazione lineare delle $Y_1 \cdots Y_N$

PER TROVARE $Y_1 \dots Y_N$ FISSO $t_0 \in]0, b[$. Definisco Y_i la soluzione del problema (PLO) tale che $Y_i(t_0) = \hat{e}_i$

($\hat{e}_i$ = versore i-esimo = $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto i)

SO CHE Y_i esiste unico per il teorema di Cauchy

Dimostro che $Y_1 \dots Y_N$ sono lin. indip. CIOE' faccio vedere che se $C_1 Y_1 + \dots + C_N Y_N = 0$, necessariamente $C_1 = \dots = C_N = 0$. MA DIRE che $C_1 Y_1 + \dots + C_N Y_N = 0$ SIGNIFICA

$$C_1 Y_1(t) + \dots + C_N Y_N(t) = 0 \qquad \forall t \in]0, b[$$

(GLI ELEMENTI DI $\mathcal{S}_0$ sono funzioni; dire che una comb. lin. è nulla vuol dire che tale comb. lin. è la funzione identicamente nulla)

MA ALLORA

$$C_1 Y_1(t_0) + \dots + C_N Y_N(t_0) = 0 \qquad \text{CIOE'}$$

$$C_1 \hat{e}_1 + \dots + C_N \hat{e}_N = 0$$

e allora $C_1 = \dots = C_N = 0$ perché $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ son lin. indip. in $\mathbb{R}^N$

Ho dim. la (1).

Vediamo la (2). Ho $Y(t)$ sol. di (PLO). La calcolo in t_0 e trovo un vettore $Y(t_0) \in \mathbb{R}^N$. Posso scrivere

$$Y(t_0) = C_1 \hat{e}_1 + \dots + C_N \hat{e}_N \qquad \left(Y(t_0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} \right)$$

Chiamo $\tilde{Y}(t) = C_1 Y_1(t) + \dots + C_N Y_N(t)$. Noto che $\tilde{Y}$ è una sol di (PLO) ($Y_1 \dots Y_N$ sono sol di (PLO))

Inoltre $\tilde{Y}(t_0) = C_1 Y_1(t_0) + \dots + C_N Y_N(t_0) = C_1 \hat{e}_1 + \dots + C_N \hat{e}_N = Y(t_0)$

DUNQUE $\tilde{Y}$ è una sol. del problema (omogeneo) che ha le stesse condizioni iniziali di $Y \Longrightarrow \tilde{Y} = Y$ (teorema di Cauchy!)

DUNQUE

$$Y(t) = C_1 Y_1(t) + \dots + C_N Y_N(t) \qquad \text{HO DIMOSTRATO (2)}$$

IN SOSTANZA PER RISOLVERE (PLO) BASTA TROVARE N sol lin. di (PLO) – PURTROPPO, NEL CASO GENERALE, NON C'È UN MODO PER TROVARE $Y_1 \dots Y_N$. C'È UNA FORMULA SOLO NEL CASO $N=1$. POI VEDREMO COSA FARE NEL CASO A indip da t.

(c) Suppongo di conoscere una sol $\bar{Y}$ di (PL).

(1) Se Y è un'altra sol. pongo $Y_0 = \bar{Y} - Y$. Faccio la derivata $\Rightarrow$

$$Y_0' = \bar{Y}' - Y' = A(t)\bar{Y} + B(t) - A(t)Y - B(t) = A(t)(\bar{Y} - Y)$$

$\Rightarrow \bar{Y} - Y$ è sol di (PLO)

(2) VICEVERSA SE Y_0 è sol di (PLO) e pongo $Y = \bar{Y} + Y_0$ ottengo

$$Y' = \bar{Y}' + Y_0' = A(t)\bar{Y} + B(t) + A(t)Y_0 = A(t)(\bar{Y} + Y_0) + B(t)$$

$\Rightarrow \bar{Y} + Y$ è sol. di (PL)

HO DIMOSTRATO (C)

QUESTI RISULTATI ESAURISCONO LA TEORIA SUL PROB LINEARE NEL CASO A dipendente da t.

D'ORA IN AVANTI CONSIDERO IL CASO $A(t) = A \in$ MATRICE $N \times N$ mentre è ammesso $B = B(t)$ dipendente dal tempo. DUNQUE HO I DUE PROBLEMI

$$\text{(PL)} \quad Y' = AY + B(t)$$
$$\text{(PLO)} \quad Y' = AY$$

A NON DIPENDE DA t

INTRODUCIAMO L'ESPONENZIALE DI UNA MATRICE

DEF Se A è una matrice $N \times N$ pongo:

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots$$

Mi chiedo se questo ha senso. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}(N \times N)$ ho la norma matriciale (che abbiamo visto essere una norma)

è uno spazio vett. di dim N^2

$\Rightarrow$ HA SENSO CONSIDERARE LE SERIE IN $\mathcal{M}(N \times N)$ (come limite delle somme parziali)

$\Longleftrightarrow$ $A = \sum A_n \Longleftrightarrow$ ogni componente a_{ij} di A è serie delle relative componenti: $a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,ij}$

- SAPPIAMO (l'abbiamo detto) che $\mathcal{M}(N \times N)$ è completo

$\Rightarrow$ vale il criterio di convergenza assoluta rispetto alla norma matriciale:

SE $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < +\infty}_{\text{serie di numeri } \geq 0 \ !!}$ $\Rightarrow$ la serie delle A_n converge

VEDIAMO IL CASO ESPONENZIALE: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ $\quad A^n = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n \text{ volte}}$

USIAMO IL CRITERIO SOPRA: $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\|$. NOTA

$$\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| = \frac{1}{n!} \| \underbrace{A \cdots A}_{n} \| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$$

($\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ se uso la norma matriciale)

DUNQUE MI BASTA CHE CONVERGA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = $ ma è $e^{\|A\|} < \infty$ e dunque TORNA !!

<u>DUNQUE</u> e^A è ben definita come matrice $N \times N$

- <u>NOTA</u> $e^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ (CONVENZIONE $A^0 = I$ anche se $A = 0$)

PROP. Se A e B commutano ($AB=BA$) $\Rightarrow$

$$e^{A} e^{B} = A^{A+B}$$

Dim. $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m\right)$$ ← USO IL PRODOTTO ALLA CAUCHY (che si estende facilmente al caso matriciale)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{m!} A^m\right)\left(\frac{1}{(n-m)!} B^{n-m}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{m} A^m B^{n-m} =$$ (ci vuole $AB=BA$ per avere la formula del binomio di Newton)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n$$

È facile vedere che se $AB \neq BA$ non vale $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ infatti se $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ e chiaramente $(A+B)^n$ contiene n^2 termini che non posso raggruppare

SE $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$

L'idea è che la sol. di $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ è data da $Y(t) = e^{tA} Y_0$ (LO VEDIAMO LA PROSSIMA VOLTA)