Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 65 14/05/2025

Sistemi di eq. diff. (del I° ORDINE)

FORMA GENERALE (in forma normale):

- Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ aperto, dato $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ considero l'equazione (in forma vettoriale $\Leftrightarrow$ sistema di equazioni scalari):

$$(S) \qquad Y' = F(t, Y) \qquad \left(Y' = F(\cdot, Y) \right)$$

Cercare una soluzione di (S) vuol dire cercare un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una $Y : I \to \mathbb{R}^N$ tali che:

(a) $\forall t \in I$ la coppia $(t, Y(t)) \in \Omega$ (dunque ci posso calcolare F)

(b) la funzione $t \mapsto Y(t)$ è di classe C^1 (posso calcolare Y')

(c) $\forall t \in I$ si ha $Y'(t) = F(t, Y(t))$

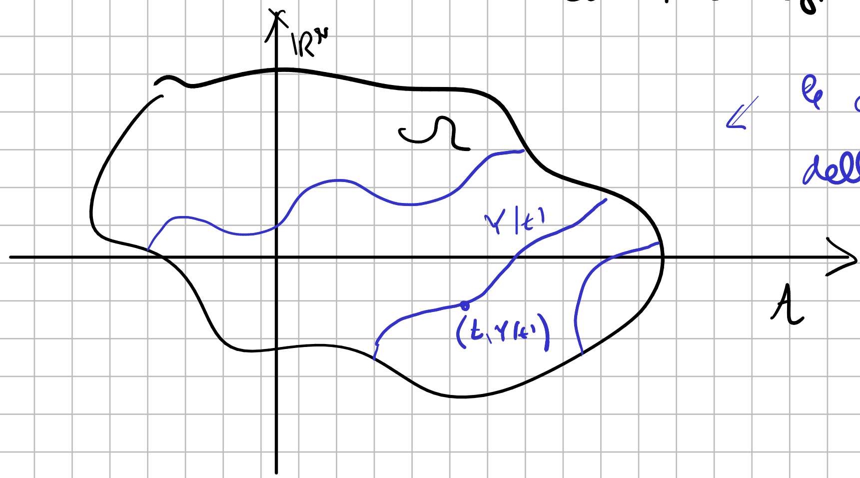
In forma "scalare" (S) corrisponde alle N equazioni:

$$(S) \begin{cases} Y_1' = F_1(t, Y) \\ \vdots \\ Y_N' = F_N(t, Y) \end{cases}$$

e ancora più in dettaglio

$$(S) \begin{cases} Y_1'(t) = F_1(t, Y_1(t), \dots, Y_N(t)) \\ \vdots \\ Y_N'(t) = F_N(t, Y_1(t), \dots, Y_N(t)) \end{cases}$$

N.B. Anche l'intervallo I su cui Y è definito è un'incognita del problema



le curve in blu sono i grafici delle soluzioni Y

PERCHÉ ESISTANO SOLUZIONI CI VORRANNO DELLE IPOTESI SU F !!

Per dare un teorema di esistenza, introduciamo il "problema di Cauchy" e cioè aggiungiamo a (S) una "condizione iniziale":

- Dato $(t_0, Y_0) \in \Omega$ considero il problema:

$$(P, t_0, Y_0) \quad (P) \begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

TEOREMA (di Cauchy) Supponiamo che la F verifichi le seguenti ipotesi:

(i) F è continua in Ω ($(t, Y) \mapsto F(t, Y)$ è continua nelle due variabili)

(ii) F è lipschitziana in Y uniformemente rispetto a t CIOÈ

$\exists\ L \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\ t, Y_1, Y_2$ con $(t, Y_1), (t, Y_2) \in \Omega$ si ha

$$\| F(t, Y_2) - F(t, Y_1) \|_{\mathbb{R}^N} \le L \, \| Y_2 - Y_1 \|_{\mathbb{R}^N}$$

OSS. Se F NON DIPENDE DA t DICO CHE (S) è "autonomo"

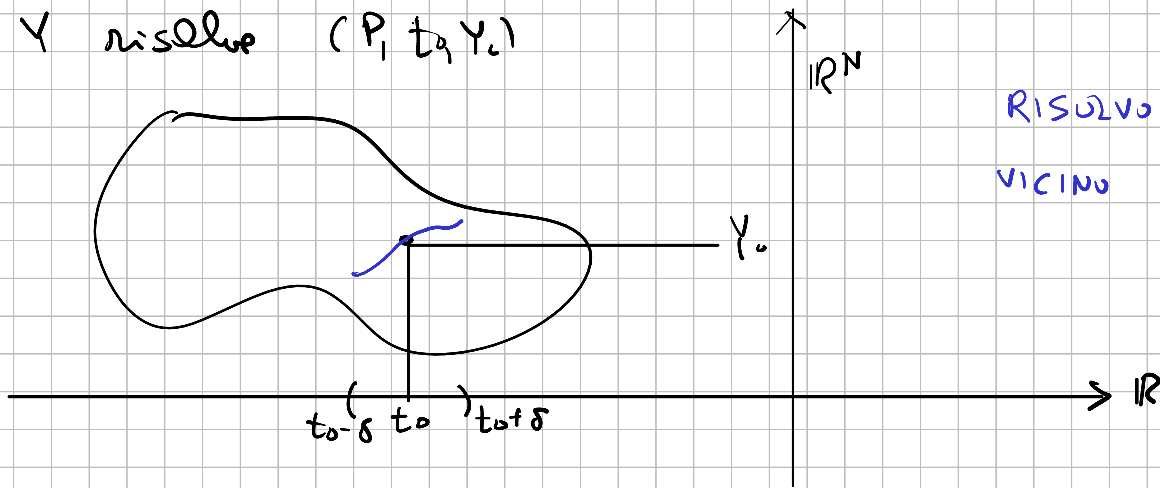
- in questo caso $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega'$ con Ω' aperto di $\mathbb{R}^N$

In questo caso l'ipotesi (ii) non contiene t (F è lipschitziana)

ALLORA

(1) (ESISTENZA) $\forall\ (t_0, Y_0)$ in Ω il problema di Cauchy (P, t_0, Y_0) ha "una soluzione locale" CIOÈ

$\exists\ \delta>0$ ed esiste $Y:]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$ tale che Y risolve (P, t_0, Y_0)



RISOLVO L'EQ. VICINO A (t_0, Y_0)

(2) (UNICITÀ) Se ci sono due soluzioni locali di (P, t_0, Y_0), cioè

$Y_1: I_1 \to \mathbb{R}^N$ $Y_2: I_2 \to \mathbb{R}^N$ dove I_1 e I_2 sono due intervalli aperti che contengono $t_0 \Rightarrow$

$$Y_1(t) = Y_2(t) \quad \forall t \in I_1 \cap I_2$$

(3) (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI INIZIALI)

Se $(t_n, Y_n) \in \Omega$, $(t_n, Y_n) \to (t_0, Y_0) \in \Omega$, se $\delta>0$

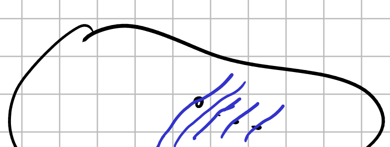
e se $Y_n:]t_n-\delta, t_n+\delta[\to \mathbb{R}^N$ che risolvono $(P, t_n, Y_n) \Rightarrow$

esiste $Y:]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$ che risolve (P, t_0, Y_0) e

$$Y_n(t) \to Y(t) \quad \forall t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[$$

(N.B.) $t \in]t_n-\delta, t_n+\delta[$ per n grande

ANZI per ogni $\delta' < \delta$ si ha che $[t_0-\delta', t_0+\delta'] \subset]t_n-\delta, t_n+\delta[$ per n grande e $Y_n \to Y$ UNIF. su $[t_0-\delta', t_0+\delta']$



NON DIMOSTRIAMO IL TEOREMA

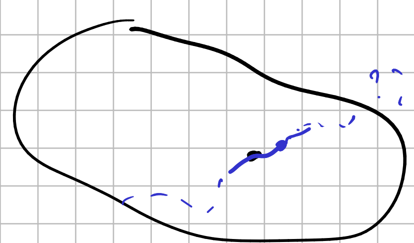
OSS. È noto (NO DIM) che con la sola continuità di F si può ancora dimostrare l'esistenza ma si perde l'unicità.

Per esempio l'equazione $y' = \sqrt{y}$ ha infinite soluzioni che partono da $(t_0, 0)$ (esercizio di Analisi I)

NON SAPPIAMO NULLA SU COME SI ESPRIME LA SOL...

PROBLEMA DELL'ESISTENZA "GLOBALE": ho trovato una (e una sola) soluzione definita vicino a t_0.

FINO A DOVE POSSO ESTENDERLA ?!



L'IDEA È DI ITERARE IL RAGIONAMENTO!

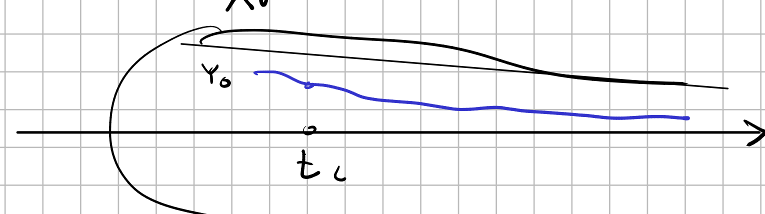
TEOREMA (di esistenza massimale) Dati Ω, F come nelle ipotesi sopra, dato $(t_0, Y_0) \in \Omega$

ESISTONO $\underline{t} < t_0 < \overline{t}$ tali che

- $\exists\ \overline{Y} :]\underline{t}, \overline{t}[\to \mathbb{R}^N$ che risolve (P, t_0, Y_0)
- se I è un intervallo che contiene strettamente $]\underline{t}, \overline{t}[$ non è possibile trovare una soluzione definita su I

Dirò che $]\underline{t}, \overline{t}[$ è l'intervallo massimale di esistenza per il problema (di Cauchy) (P, t_0, Y_0) e dirò che $\overline{Y}$ è la soluzione massimale.

INOLTRE CI SONO TRE POSSIBILITÀ per $\overline{t}$ (rispettivamente per $\underline{t}$)

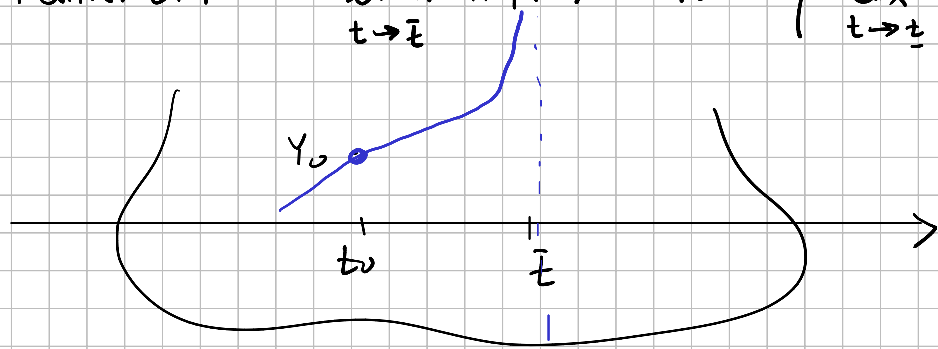


(1) $\overline{t} = +\infty$ $\quad (\underline{t} = -\infty)$

(2) $\overline{t} < +\infty$ e $\|Y(t)\|$ è illimitato in $[t_0, \overline{t}[$

$(\underline{t} > -\infty$ e $\|Y(t)\|$ è illimitato in $]\underline{t}, t_0])$

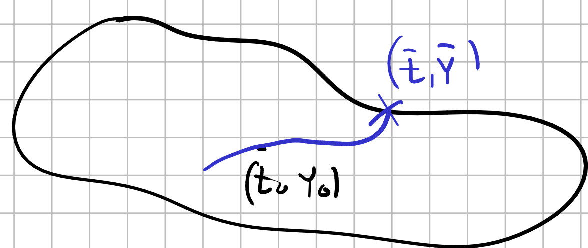
"MORALMENTE" $\lim_{t \to \bar{t}} \|Y(t)\| = +\infty$ $\left(\lim_{t \to \underline{t}} \|Y(t)\| = +\infty \right)$



(3) $\bar{t} < +\infty$, $\|Y(t)\|$ LIMITATA in $[t_0, \bar{t}[$ e allora

$\operatorname{dist}((t, Y(t)), \partial\Omega) \xrightarrow[t \to \bar{t}]{} 0$

"MORALMENTE" $Y(t) \xrightarrow{t \to \bar{t}} \bar{Y}$ con $(\bar{t}, \bar{Y}) \in \partial\Omega$



(ANALOGA SITUAZIONE PER $\underline{t}$)