Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 64   12/05/2025

AVVISO: Ho fissato due lezioni di recupero (di 3 ore ...) i giorni 26 e 27 maggio alle 10.30 aula C21

Riprendiamo l'ultimo esercizio

$S = \{ 4x^2+y^2-9 = z^2 \ , z \geq 0 \quad 9 \leq 4x^2+y^2 \leq 25 \}$

$C = \{ 4x^2+y^2 = 25 \quad 0 \leq z \leq 4 \}$

$B = \{ z=0 \quad 9 \leq 4x^2+y^2 \leq 25 \}$

$\vec{f} = 2z(2x\vec{i}+y\vec{j})$ $\quad\quad \hat{\nu} =$ normale uscente da D

Rifaccio i flussi

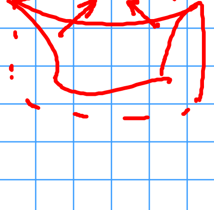
$\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ $\quad$ Uso la parametrizzazione grafico:

$\Gamma : B' \to \mathbb{R}^3 \quad\quad B' = \{(x,y) : \quad 9 \leq 4x^2+y^2 \leq 25\}$

$\Gamma(x,y) = (x, y, g(x)) \quad\quad g(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2-9}$

$$\vec{N}_\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\,x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2-9}}\,\vec{i} - \frac{\cancel{2}\,y}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2-9}}\,\vec{j} + \vec{k}$$

(vedo che $\vec{N}_\Gamma$ è concorde con $\hat{\nu}$ — "punta verso l'alto"



Allora

$$\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_{B'} \vec{f}\,(\overbrace{\Gamma(x,y)}^{(x,y,g(x,y))}) \cdot \vec{N}_\Gamma(x,y)\,dx\,dy =$$

$\vec{0}\cdot\vec{k}$

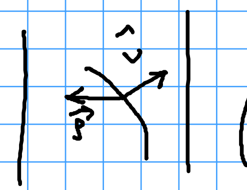
$$\iint_{B'} 2\sqrt{4x^2+y^2-9}\,\left(2x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{-4x}{\sqrt{4x^2+y^2-9}}\,\vec{i}+\frac{-y}{\sqrt{4x^2+y^2-9}}\,\vec{j}+\vec{k}\right)dx\,dy=$$

NON CONTA

$$2\iint_{B'}\left(-8x^2-y^2\right)dx\,dy=\circledast \qquad x=\frac{\rho}{2}\cos\theta \qquad y=\rho\sin\theta$$

$$0\le\theta\le 2\pi \qquad 3\le\rho\le 5 \qquad \left(4x^2+y^2=4\frac{\rho^2}{4}\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2\right)$$

$$dx\,dy=\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\cos\theta}{2} & -\frac{\rho}{2}\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{bmatrix}\right|d\rho\,d\theta=\frac{\rho}{2}\,d\rho\,d\theta \implies$$



$$\circledast=-\cancel{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_3^5\left(2\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\frac{\rho}{\cancel{2}}\,d\rho\right)d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\theta+\overbrace{\sin^2\theta}^{1-\cos^2\theta}\right)d\theta\int_3^5\rho^3\,d\theta=$$

$$-\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta+1\right)d\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^5=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(2\theta)+1}{2}+1\right)d\theta\,\frac{5^4-3^4}{4}=$$

$$-\left(\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi\right)\frac{(25-9)(25+9)}{4}=\frac{-3\cdot16\cdot34}{4}=-408\pi$$

$$\phi\left(\vec{f},C,\hat{v}\right)$$

Uso $\Gamma(\theta,z):=\left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ 5\sin\theta,\ z\right) \leftarrow \left(4x^2+y^2=25\right)$

$$0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le z\le 4$$

$$\vec{N}_\Gamma(\theta,z)=\left(-\frac{5}{2}\sin\theta\,\vec{i}+5\cos\theta\,\vec{j}\right)\otimes\vec{k}=$$

$$-\frac{5}{2}\sin\theta\,\underbrace{\vec{i}\otimes\vec{k}}_{-\vec{j}}+5\cos\theta\,\underbrace{\vec{j}\otimes\vec{k}}_{\vec{i}}=\underbrace{5\cos\theta\,\vec{i}+\frac{5}{2}\sin\theta\,\vec{j}}$$

PUNTA VERSO L'ESTERNO $\Rightarrow$ è concorde con $\hat{v}$

$$\phi\left(\vec{f},C,\hat{v}\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^4\vec{f}\left(\frac{5}{2}\cos\theta,5\sin\theta,z\right)\cdot\left(5\cos\theta\,\vec{i}+\frac{5}{2}\sin\theta\,\vec{j}\right)d\theta\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^4 2z\left(5\cos\theta\,\vec{i}+5\sin\theta\,\vec{j}\right)\cdot\left(5\cos\theta\,\vec{i}+\frac{5}{2}\sin\theta\,\vec{j}\right)d\theta\,dz$$

$$\int_0^4 2z\,dz \int_0^{2\pi}\left(25\cos^2\theta + \frac{25}{2}\sin^2\theta\right)d\theta =$$

$$\left[z^2\right]_0^4 \quad 25\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta = 16\cdot 25\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$8\cdot 25\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} + 1\right)d\theta = 8\cdot 25\cdot 3\pi = 600\pi$$

$$\iint_B \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 0 \qquad \text{perché} \qquad \hat{\nu} = -\hat{k} \quad e \quad \vec{g}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu}) = -408\pi + 600\pi + 0 = 192\pi$$

Vediamo se torna con il teorema della divergenza:

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{g}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}2z(2x) + \frac{\partial}{\partial y}2zy + \frac{\partial}{\partial z}0\right)dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_D 6z\,dx\,dy\,dz$$

$$D = \{4x^2+y^2 \le 25,\ z \ge 0,\ z^2 \le 4x^2+y^2-9\}$$

$$= \{(x,y)\in B' \quad 0 \le z \le \sqrt{4x^2+y^2-9}\}$$

$$B' = \{9 \le 4x^2+y^2 \le 25\}$$

$$\iint_{B'}\left(\int_0^{\sqrt{4x^2+y^2-9}} 6z\,dz\right)dx\,dy = \iint_{B'}\left[3z^2\right]_0^{\sqrt{4x^2+y^2-9}} = 3\iint_{B'}(4x^2+y^2-9)\,dx\,dy$$

come prima $\quad x = \frac{\rho}{2}\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \quad dx\,dy = \frac{\rho}{2}\,d\rho\,d\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi \quad 3 \le \rho \le 5$

$$3\int_0^{2\pi}\left(\int_3^5(\rho^2-9)\,\frac{\rho}{2}\,d\rho\right)d\theta = 3\pi\int_3^5(\rho^3 - 9\rho)\,d\rho =$$

$$3\pi\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{9}{2}\rho^2\right]_3^5 = \frac{3\pi}{4}\left[\rho^4 - 18\rho^2\right]_3^5 = \frac{3\pi}{4}\left(5^4 - 3^4 - 18(25-9)\right) =$$

$$\frac{3}{4}\pi(544 - 288) = \frac{256}{4}\cdot 3\pi = \underline{192\pi} \qquad \text{TORNA}$$

FATTO: IL T. DELLA DIVERGENZA VALE ANCHE IN $\mathbb{R}^2$

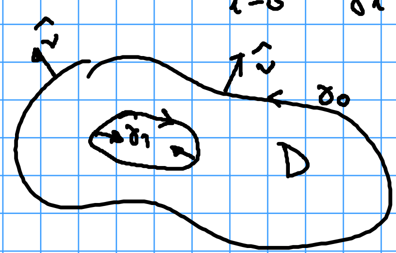
TEOREMA: Se D dominio regolare in $\mathbb{R}^2$, Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$ con $D \subset \Omega$, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. In questo caso

$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2$. Allora

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy = \int_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, ds$$

dove $\hat{\nu}$ è la normale uscente e l'integrale di destra è una somma di integrali curvilinei: se ∂D è l'unione dei sostegni di $\gamma_0 \ldots \gamma_k$ (curve chiuse reg. a tratti) $\Rightarrow$

$$\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \left(\vec{f} \cdot \hat{\nu} \right) ds$$



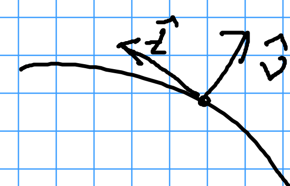
La dim è simile a quella del caso 3D.

Riformuliamo in $\mathbb{R}^2$: $D \subset \mathbb{R}^2$ dom. reg. a tratti $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ C^1 $D \subset \Omega$. Poniamo $\vec{g} := R\vec{f} = f_2 \vec{i} - f_1 \vec{j}$

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (rotazione di $90°$ in verso orario)

$R^{-1} = R^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Applico il t. della div. a $\vec{g}$ $\Rightarrow$

$$(**) \quad \iint_D \operatorname{div} \vec{g} \, dx\,dy = \int_{\partial D} \vec{g} \cdot \hat{\nu} \, ds$$



Chiamo $\hat{\tau} := R^{-1} \hat{\nu}$ (ruoto $\hat{\nu}$ di $90°$ antiorario)

$\hat{\tau}$ è un versore tangente alla curva ($\hat{\tau}$ induce un verso su ∂D coerente con $\hat{\nu}$) Allora posso riscrivere $(**)$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right) dx\,dy = \int_{\partial D} \underbrace{(R\vec{f} \cdot R\hat{t})}_{\vec{f}\cdot\hat{t}}\, ds = \int_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{t}\, ds$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

se ∂D è descritto da $\gamma_0 \ldots \gamma_k$ e se il verso delle γ_i è coerente con $\hat{\nu}$ ($\Leftrightarrow$ γ_i' è concorde con $\hat{t}$)

HO TROVATO LA FORMULA DI GAUSS-GREEN:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right) dx\,dy = \int_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{t}\, ds \qquad (\hat{t} = R\hat{\nu})}$$

OSS. SI IMMAGINI DI VEDERE D (che è in $\mathbb{R}^2$) immerso in $\mathbb{R}^3$

$$\tilde{D} = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \quad z = 0\}$$

$\tilde{D}$ è una superficie (è il grafico di $g(x,y) = 0$ $(x,y) \in D$)

INOLTRE consideriamo $\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y)\,\vec{i} + f_2(x,y)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$

Allora la formula di G.G. si può riscrivere:

$$\boxed{\Phi(\mathrm{rot}\,\vec{f}, D, \vec{k}) = \int_{\Sigma(\tilde{D})} (\vec{f}\cdot\hat{t})\, ds}$$

(il rotore di $\vec{f}$ è $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$) ($\vec{k}$ è una possibile orientazione di $\tilde{D}$ - COERENTE CON $\hat{t}$)

Da questo caso particolare, usando le parametrizzazioni, si trova che se S è una sup parametrica e $\hat{\nu}$ è un'orientazione di S $\Rightarrow$

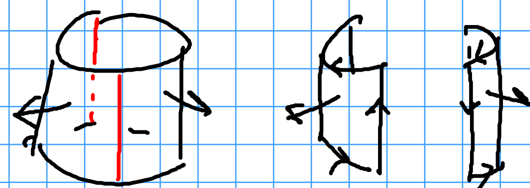
$$\Phi(\mathrm{rot}\,\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \int_{\Sigma(S)} \vec{f}\cdot\hat{t}\, ds \quad \left(= \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot d\vec{s}\right.$$

se le γ_i hanno verso "$\hat{t}$")

TEOREMA DI STOKES (PARAMETRICO)

dove ($\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}$, C^1, $S \subset \Omega$) $\hat{t}$ è il verso tangente coerente con $\hat{\nu}$ ($(\hat{n}, \hat{t}, \hat{\nu})$ è destra)

IL TEOREMA IN REALTÀ VALE se $(S, \hat{\nu})$ è una superficie regolare a tratti ORIENTATA (lo vedo incollando superfici parametriche e notando che dove incollo gli int. curvilinei si cancellano)



DEF. (POTENZIALE VETTORE $\neq$ POTENZIALE)

Dato $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ continuo e dato $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$!! di classe C^1 dico che $\vec{F}$ è UN POTENZIALE VETTORE per $\vec{f}$ se

$$\text{rot}\, \vec{F} = \vec{f}$$

QUI CI SONO VARIE PROPRIETÀ ANALOGHE A QUELLE VISTE PER CAMPI CONSERVATIVI

TEOREMA $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ammette potenziale vettore $\iff$ per ogni superficie orientabile $S \subset \Omega$ tale che $\partial(S) = \emptyset$ si ha $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = 0$

OSS $\Rightarrow$ è conseguenza del teorema di Stokes (se $\partial(S) = \emptyset$ allora il termine a destra dell'"=" è zero)

Il $\Leftarrow$ è invece complicato..

OSS. Se $\vec{f}$ (è C^1 e $\vec{f}$) ammette potenziale vettore $\Rightarrow$ div $\vec{f} = 0$. È un calcolo semplice. L'idea è che $\vec{f} = \text{rot}\, \vec{F}$ "$= \vec{\nabla} \otimes \vec{F}$" $\Rightarrow$

div $\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \vec{0}$ (viene $\vec{F} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}}_{=\vec{0}}$ ...)

DEF. Se div $\vec{f} = 0$ dico che $\vec{f}$ è SOLENOIDALE. QUINDI

$\vec{f}$ ammette pot. vettore $\Rightarrow$ $\vec{f}$ SOLENOIDALE

IL VICEVERSA VALE SE Ω HA UNA PROPRIETÀ SIMILE

(NON LA STESSA! degli insiemi semplicemente connessi:

(★) OGNI SUPERFICIE ORIENTABILE CHIUSA CONTENUTA IN Ω SI PUÒ "CONTRARRE - IN Ω - A UN PUNTO"

NO DIM - OVVIAMENTE

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ NON VERIFICA (★) LO FACCIO VEDERE TROVANDO UN CAMPO $\vec{f}$ SOLENOIDALE CHE NON HA POT. VETTORE

TALE CAMPO È

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right)$$

(è radiale). Calcoliamo div $\vec{f}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left(x^2+y^2+z^2 - 3x^2 \right) = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial}{\partial x} f_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \Longrightarrow$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left(-2x^2+y^2+z^2 + x^2-2y^2+z^2 + x^2+y^2-2z^2 \right) = 0$$

$\vec{f}$ è SOLENOIDALE. PERÒ se considero $S_R = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$, $R>0$

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(verso l'esterno della palla)

$S_R = \partial B_R$ «PALLA» $\Rightarrow \partial(S_R) = \emptyset$

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds = \iint_S \|\vec{f}\|\, d\sigma = \iint_S \frac{1}{R^2}\, d\sigma = 4\pi > 0$$

NON HA FLUSSO NULLO ATTRAVERSO S_R

$\vec{f}$ NON AMMETTE POT. VETTORE

RISPETTO A UN SUO PUNTO x_0

FATTO Se Ω è stellato $\Rightarrow$ Ω ha la prop. $(\ast)$

(ogni sup S con $\Sigma(S) = \emptyset$ è "contrattile" a un punto)

DUNQUE se Ω è stellato $(\ldots x_0 \ldots)$ $\Rightarrow$ ogni campo solenoidale ammette pot. vettore.

ESERCIZIO $\vec{f} = yz\,\vec{i} + xzy\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$

NOTIAMO CHE $\vec{f}$ è solenoidale: $\left(\frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{z} xy = 0 \right)$

$\vec{f}$ è def. su $\mathbb{R}^3$ che è stellato (convesso) $\Rightarrow \exists\, \vec{F} : \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$

Come trovo $\vec{F}$?? $\quad \vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

CERCO $\vec{F}$ con $F_3 = 0$ (vediamo se ci riesco)

$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$. Calcoliamo rot $\vec{F}$:

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & F_1 \\ \vec{j} & D_y & F_2 \\ \vec{k} & D_z & 0 \end{bmatrix} = \vec{i}(-D_z F_2) - \vec{j}(-D_z F_1) + \vec{k}(D_x F_2 - D_y F_1)$$

Dunque ho le condizioni

$$-\frac{\partial}{\partial z} F_2 = f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial z} F_1 = f_2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} = f_3$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1 = xz \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -yz \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = xy$$

$$\Rightarrow F_1 = x\frac{z^2}{2} + c(x,y) \qquad F_2 = -y\frac{z^2}{2} + d(x,y)$$

e dalla terza $\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{z^2}{2} + d(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{z^2}{2} + c(x,y)\right) = xy$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} d(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} c(x,y) = xy$$

Posso prendere $c = 0$ e $d = \frac{x^2}{2} y$ /

$d = 0$ e $c = x\frac{y^2}{2}$ /

$c = \frac{xy^2}{4} \quad d = \frac{x^2 y}{4}$ . . .

e tutte queste scelte mi danno un pot. vettore $\vec{F}$ (con $F_3 = 0$!!)

<u>FATTO</u> Se Ω è convesso e $\vec{F}$ è un pot. vettore per $\vec{f}$. ALLORA ogni $\vec{F}_1 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è ancora pot. vettore per $\vec{f}$

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \nabla G \qquad \text{dove } G : \Omega \to \mathbb{R} \text{ è } C^1$$

(in particolare $\vec{F}_1 = \vec{F}$ + costante, ma c'è molto di più !!)

NOTA che $\operatorname{rot} \nabla G = 0$!!