Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

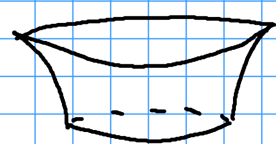
Lezione 63 08/05/2025

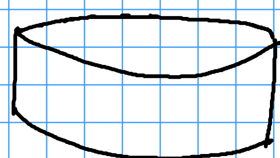
$D := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 4x^2 + y^2 \le 25, \; z \ge 0, \; z^2 \le 4x^2 + y^2 - 9 \} =$

$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 4x^2 + y^2 \le 25 \quad 0 \le z \le \sqrt{4x^2+y^2-9} \}$

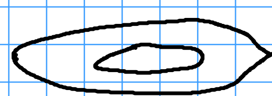
$\vec{f}(x,y,z) := 2z(2x\vec{i} + y\vec{j})$

$\partial D \longrightarrow$

$S \longrightarrow$  $\leftarrow \{ (x,y) \in B', \; z^2 = 4x^2+y^2-9, \; z \ge 0 \}$

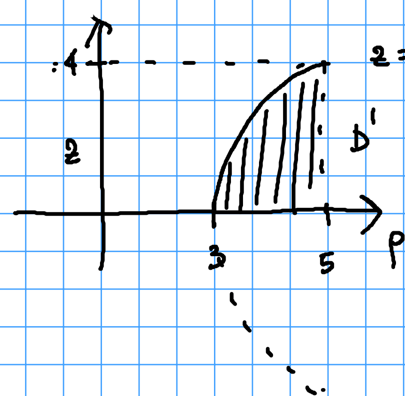
$L =$  $\leftarrow \{ 4x^2+y^2 = 25, \; 0 \le z \le 4 \; ? \}$

(base ellittica)

$B \Rightarrow$  $\leftarrow \{ z=0 \quad 9 \le 4x^2+y^2 \le 25 \}$

$B' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 9 \le 4x^2+y^2 \le 25 \}$

Se pongo $\rho^2 = 4x^2 + y^2$



$z = \sqrt{\rho^2-9} \qquad z^2 = \rho^2 - 9$

$\rho^2 - z^2 = 9$

$D = \{ \rho^2 \le 25, \; z \ge 0, \; z^2 \le \rho^2 - 9 \}$

$\{ \rho \le 5, \; z \ge 0 \quad z \le \sqrt{\rho^2-9} \}$

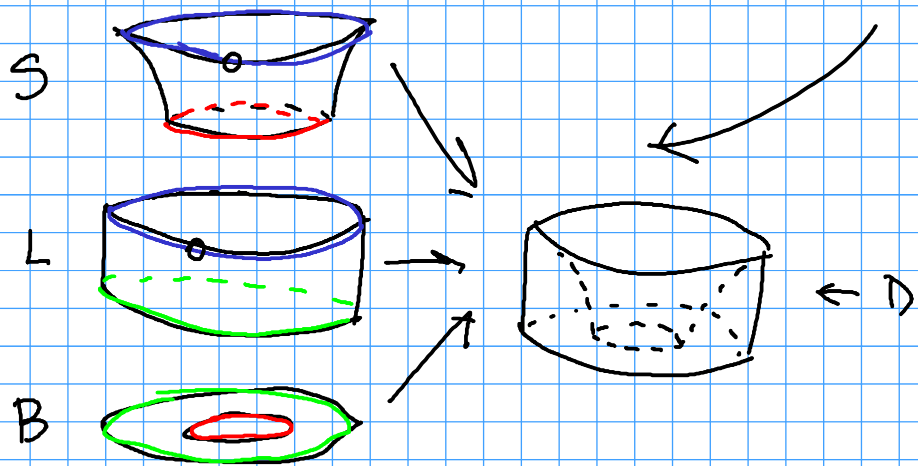
$\{ (\rho, z) \in D' \}$

$\left(= \{ \quad 9 \le 4x^2+y^2 \le 25, \quad 0 \le z \le \sqrt{4x^2+y^2-9} \right)$

$D' = \{ 3 \le \rho \le 5, \; z \ge 0, \; \rho^2 - z^2 \ge 9 \}$

$\Sigma(\partial D) = \phi \qquad \Sigma^*(\partial D) = \partial D \setminus \partial_{reg} D =$

$$\underset{\text{VERDE}}{\{z=0,\ 4x^2+y^2=25\}} \cup \underset{\text{ROSSO}}{\{z=0,\ 4x^2+y^2=9\}} \cup \underset{\text{BLU}}{\{z=4,\ 4x^2+y^2=25\}}$$



Sia $P_0 = (-\sqrt{3}, 1, 2)$. Dove sta P_0?

Vediamo che $\boxed{P_0 \in S}$: $4x^2+y^2-9=z^2 \quad z \geq 0$ in effetti

$4 \cdot 3 + 1 - 9 = 4$?? $\quad 12+1-9=4 \quad 13-9=4 \quad 4=4$ SÌ

NON STA IN B ($z>0$), NON STA IN L perché $4x^2+y^2 = 13 \neq 25$

DUNQUE P_0 è punto regolare per ∂D

Cerchiamo $\hat{\nu}(P_0)$ ← NORMALE USCENTE DA D!! . Dato che $P_0 \in S \setminus \Sigma^* = \{G_3=0,\ G_1<0,\ G_2<0\}$

$$G_3 = z^2 - 4x^2 - y^2 + 9 \rightarrow \nabla G_3 = -8x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} G_2 = -z \\ G_1 = 4x^2+y^2-25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nu(P_0) = \frac{\nabla G_3(P_0)}{|\nabla G_3(P_0)|} = \frac{+8\sqrt{3}\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{64\cdot 3 + 4 + 16}} =$$

$$\frac{8\sqrt{3}\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{212}} = \frac{4\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{53}} = \hat{\nu}(P_0)$$

$192 + 4 + 16 = 212 = 4 \cdot 53$

$$\begin{array}{r|l} 212 & 2 \\ 106 & 2 \\ 53 & \end{array}$$

Prendiamo $P_1 = (2, 3, 4)$. Vedo che $P_1 \in \Sigma(S)$.

INFATTI $z^2 - 4x^2 - y^2 + 9 = 16 - 16 - 9 + 9 = 0 \Rightarrow P_1 \in S$

MA $P_1 \in L$ perché $z = 4$, $4x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25$

OSS. Se $D=\{G_1\le 0 \dots G_k\le 0\}$ e vale l'ipotesi di non tangenza allora tutte le $S_i := \{G_i=0,\ G_j\le 0\}$ sono superfici e

$$\Sigma(S_i) = \bigcup_{j\ne i}\{G_i=0,\ G_j=0\} = \{P\in S_i : \exists\, j\ne i \text{ con } G_j(P)=0\}$$

QUESTO FATTO (NON DIMOSTRATO) È DENTRO IL TEOREMA della volta scorsa che riguarda ∂D = superficie reg. a tratti

CERCHIAMO $\hat\nu(P_1)$ $\hat n(P_1)$ e $\hat t(P_1)$

$$\hat\nu(P_1) = \frac{\nabla G_3}{\|\nabla G_3\|}(P_1) \qquad \left(S=\{\underline{\underline{G_3=0}},\ G_i\le 0\}\right)$$

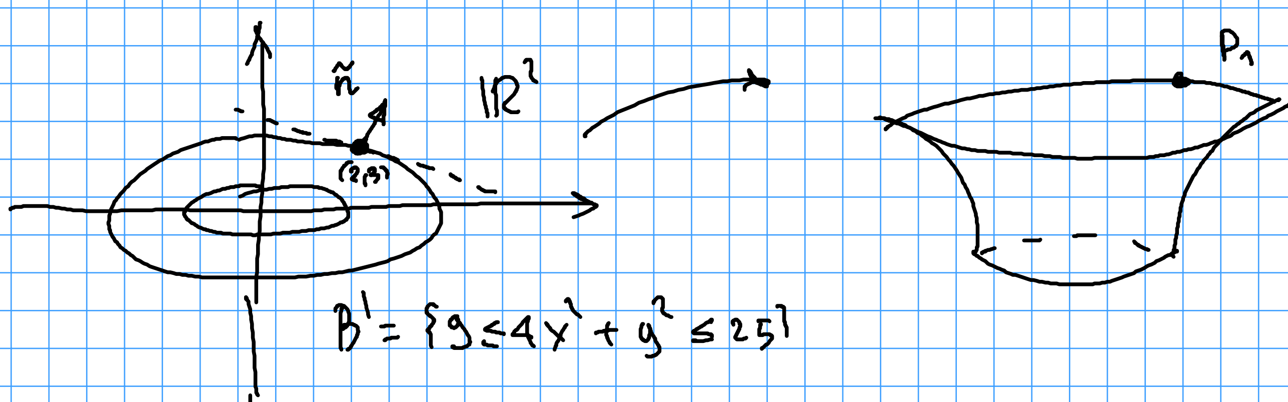
$$\nabla G_3 = -8x\vec i - 2y\vec j + 2z\vec k \Rightarrow \nabla G_3(P_1) = -16\vec i - 6\vec j + 8\vec k = 2(-8\vec i - 3\vec j + 4\vec k)$$

$$\hat\nu(P_1) = \frac{-8\vec i - 3\vec j + 4\vec k}{\sqrt{64+9+16}} = \frac{-8\vec i - 3\vec j + 4k}{\sqrt{89}}$$

Per trovare $\hat t$ e $\hat n$ mi serve una parametrizzazione di S. Dato che S è il grafico di $g(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2-9}$ su $B'=\{9\le 4x^2+y^2\le 25\}$

Ho $\Gamma(x,y)=(x,y,g(x,y))$ e le coordinate di P_1 sono
$x=2$ $y=3$ ($4x^2+y^2 = 4\cdot 4+9 = 16+9=25 \in \partial B'$)
(ritrovo il fatto che $P_1\in\Sigma(S)$).

Devo prendere $\tilde\tau \in \mathbb{R}^2$ tangente a $\partial B'$ e applicarci J_Γ



Posso considerare la curva $\gamma(t) = \left(\frac{5}{2}\cos(t), 5\sin(t)\right)$

percorre l'ellisse $4x^2+y^2=25$. C'è $t_1 : \gamma(t_1) = (2,3)$

$\frac{5}{2}\cos(t_1) = 2 \qquad 5\sin(t_1) = 3$

$\cos(t_1) = \frac{4}{5} \qquad \sin t_1) = \frac{3}{5}$

$\gamma'(t) = \left(-\frac{5}{2}\sin(t), 5\cos(t)\right)$

Voglio $\gamma'(t_1) = \left(-\frac{5}{2}\sin(t_1), 5\cos(t_1)\right)$

$= \left(-\frac{5}{2}\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j} =: \vec{\tau}$

VETTORE TANGENTE A $\partial B'$ in $(2,3)$

Applico $J_p(2,3)$ a $\hat{\tau}$.

$$J_p(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2-9}}, & \frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2-9}} \end{pmatrix}\right|_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$J_p(2,3)\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{t}$$

se normalizzo trovo $\|\vec{t}\| = \sqrt{\frac{9}{4}+16} = \frac{\sqrt{9+64}}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$

Allora $\hat{t} = \pm \frac{2}{\sqrt{73}}\left(-\frac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j}\right) = \pm \frac{-3\vec{i}+8\vec{j}}{\sqrt{73}}$

VERIFICO CHE $\hat{t}$ è ortogonale a $\hat{\nu}$

$$\hat{t}\cdot\hat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{73}}(-3\vec{i}+8\vec{j})\,\frac{1}{\sqrt{89}}(-8\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}) = 0$$

Mi serve $\hat{n}$? Cerco $\vec{n} \in T_S(P_1)$ ortogonale a $\hat{t}$ e "uscente".

$\vec{n}$ deve essere ortogonale sia a $\hat{v}$ che a $\hat{t}$ cioè

$\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ deve essere

$$\begin{cases} -8x - 3y + 4z = 0 \\ -3x + 8y \qquad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x + 3y = 4z \\ \underbrace{-3x + 8y}_{\det = 64+9 \neq 0} = 0 \end{cases}$$

Posso risolvere in termini di z

$$\begin{matrix} I \cdot 3 \\ II \cdot 8 \end{matrix} \begin{cases} 24x + 9y = 12z \\ -24x + 64y = 0 \end{cases} \implies 73y = 12z \qquad y = \frac{12}{73}z$$

$$\begin{matrix} I \cdot (-8) \\ II \cdot 3 \end{matrix} \begin{cases} -64x - 24y = -32z \\ -9x + 24y = 0 \end{cases} \implies -73x = -32 \qquad x = \frac{32}{73}z$$

$$\vec{n} = \lambda(32, 12, 73)$$

Devo scegliere λ in modo che $\|\vec{n}\| = 1$ e $\vec{n}$ concorde con $J_p \underbrace{(\text{normale uscente a } B' \text{ in } (2,3))}_{\tilde{n}}$

$\tilde{n}$ si ottiene facendo $\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}(2,3)$ dove $G = 4x^2 + y^2 - 25$

$$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \tilde{n} = \frac{16\vec{i} + 6\vec{j}}{\sqrt{64+36}} = \frac{16\vec{i} + 6\vec{j}}{10}$$

$$J_p(2,3)\,\tilde{n} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 32 + 9/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ \frac{73}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 32 \\ 12 \\ 73 \end{pmatrix}$$

MI ACCORGO CHE

$$\vec{n} = \lambda\, J_p(2,3)\,\tilde{n}$$

(è un caso particolare – dipende da T: J_p manda tangenti in tangenti – SEMPRE!! – e (in questo caso) normali in normali)

Dello fino $\hat{n}(P_1) = \dfrac{32\vec{i} + 12\vec{j} + 73\vec{k}}{\sqrt{32^2+12^2+73^2}}$ . . .

RIMANE DA DECIDERE IL VERSO DI $\hat{t}$. Per decidere devo guardare $\det(\hat{n}, \hat{t}, \hat{v}) > 0 \quad (=1)$

$$= \det\left(\cancel{\underbrace{\text{costante}}_{>0}}\right)\begin{pmatrix} 32 & -3 & -8 \\ 12 & 8 & -3 \\ 73 & 0 & 4 \end{pmatrix} > 0 \ ?? \quad \left(\begin{array}{c}\text{se è } <0 \\ \text{cambio verso} \\ \text{a } \hat{t}\end{array}\right)$$

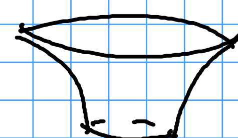
$$73 \det\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 32 & -3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = 73\cdot(9+64) + 4(25+36) > 0$$

DUNQUE $\hat{t} = \dfrac{-3\vec{i} + 8\vec{j}}{\sqrt{73}}$

Cerchiamo i flussi di $\vec{f}$ attraverso S, L e B e verifichiamo il teorema della divergenza

Per calcolo i flussi uso le parametrizzazioni

$$S = \{ z^2 = 4x^2+y^2-9,\ 0 \le z \le 4 \} = \{ 9 \le 4x^2+y^2 \le 25,\ z = \sqrt{4x^2+y^2-9} \}$$



Lo parametrizzo come prima: $\Gamma : B' \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma(x,y) = (x, y, \sqrt{4x^2+y^2-9})$ $\qquad B' = \{ 9 \le 4x^2+y^2 \le 25 \}$

$$\vec{f} = 2z(2x\vec{i} + y\vec{j})$$

Per fare il flusso $\Phi(\vec{f}, S, \hat{v})$ devo controllare x

$\vec{N}_\Gamma(x,y)$ è concorde con $\hat{\nu}(\Gamma(x,y))$ o con $\nabla G_3(\Gamma(x,y))$

$\left(\hat{\nu}(p) = \dfrac{\nabla G_3(p)}{\|\nabla G_3\|}\right)$

RICORDO CHE $\quad \vec{N}_\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{-8x}{\sqrt{4x^2+y^2-9}}\vec{i} - \dfrac{2y}{\sqrt{4x^2+y^2-9}}\vec{j} + \vec{k}$

che è multiplo di $\underbrace{-8x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + \sqrt{4x^2+y^2-9}\,\vec{k}}_{(1)}$

Mentre $\nabla G_3(x,y,z) = \underbrace{-8x\,\vec{i} - 2y\vec{j}}_{(2)} + 2z\,\vec{k}$ dunque dove fine

$(-8x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 2\sqrt{4x^2+y^2-9}\;\vec{k}) \cdot (-8x\vec{i} - 2y\,\vec{j} + \sqrt{4x^2+y^2-9}\,\vec{k}) \underline{\underline{> 0}}$

(2) (1)

DUNQUE $\vec{N}_\Gamma$ è concorde a ellos

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_{B'} \vec{f}(\Gamma(x,y)) \cdot \vec{N}_\Gamma(x,y)\, dx\,dy =$$

$$\iint_{B'} \underbrace{2\sqrt{4x^2+y^2-9}\left(2x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)}_{\vec{f}(\Gamma(x,y))} \cdot \underbrace{\left(\frac{-8x\;\vec{i}}{\sqrt{4x^2+y^2-9}} - \frac{2y\;\vec{j}}{\sqrt{4x^2+y^2-9}} + \vec{k}\right)}_{\vec{N}_\Gamma(x,y)} dx\,dy$$

$$\iint_{B'} 2\left(2x\vec{i} + y\,\vec{j}\right)\cdot\left(-8x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}\right)\, dx\,dy =$$

$$2\iint_{B'} \left(16x^2 - 2y^2\right) dx\,dy = 4 \iint_{\{9 \le 4x^2+y^2 \le 25\}} \left(8x^2 - y^2\right) dx\,dy$$

CAMBIO DI VARIABILE $\quad \rho^2 = 4x^2+y^2 \qquad \left(\rho = \sqrt{4x^2+y^2}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\rho}{2}\cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{aligned}} \qquad \left(\Rightarrow 4x^2+y^2 = 4\frac{\rho^2}{4}\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2\right)$$

$$\phi(\rho,\theta) := \rho\begin{pmatrix}\frac{\cos(\theta)}{2}\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\theta)}{2}\rho, & \frac{\cos(\theta)}{2} \\ \cos(\theta)\rho, & \sin\theta\end{pmatrix} =$$

$\det J_\phi(\rho,\theta) = -\frac{\rho}{2}$ $\Rightarrow$ B' è dato da $0 \le \theta \le 2\pi$ $3 \le \rho \le 4$

$$4\iint_{B'} 8x^2 - y^2 = 4\int_0^{2} d\theta \int_3^4 \rho\, d\rho \left(\frac{8\rho^2\cos^2(\theta)}{4} - \rho^2 \sin^2(\theta)\right) d\rho$$

$$4\int_0^{2\pi}\left(\int_3^4 \rho^3 \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\rho\right) d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2(\theta) - \sin^2\theta\right) d\theta}_{1} \underbrace{4\int_3^4 \rho^3\, d\rho}_{2}$$

$$1 = \int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\theta - 1\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left(3\,\frac{\cos(2\theta)+1}{2} - 1\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta$$

(ie $\cos(2\theta)$ ha integrale nullo) $= \pi$

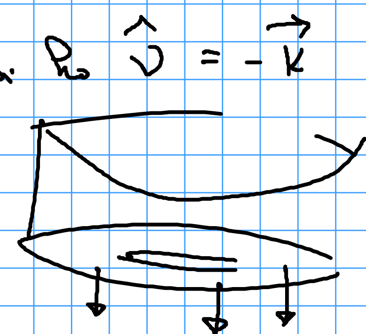
$$2 = 4\int_3^4 \rho^3\, d\rho = 4\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^4 = 4^4 - 3^4 = (4^2 - 3^2)(4^2 + 3^2) =$$

$$(16-9)(16+9) = 7 \cdot 25 = 175$$

$$\boxed{\iint_S \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 175\pi}$$

$$\boxed{\iint_B \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0}$$

perché su B si ha $\hat{\nu} = -\vec{k}$



($B = \{ z = 0, + \dots \}$ ..

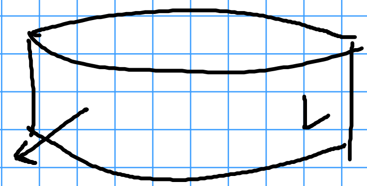
$G_2 = -z$ $\qquad \nabla G_2 = -\vec{k}$)

Mentre $\vec{g} \cdot \vec{k} = 0$ (guardo l'espressione di $\vec{g}$)

$\iint_L \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$ Come parametrizzo L ??

L è un "cilindro" (di sezione ellittica)

$\Gamma(\theta,z) := \left(\frac{5}{2}\cos(\theta), 5\sin\theta, z\right)$ $\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\quad 0 \le z \le 4$



$$\vec N_\Gamma(\theta,z) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sin\theta \\ 5\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(-\frac{5}{2}\sin\theta\,\vec i + 5\cos\theta\,\vec j\right)\otimes \vec k = -\frac{5}{2}\sin\theta\,\underbrace{\vec i\otimes\vec k}_{-\vec j} + 5\cos\theta\,\underbrace{\vec j\otimes\vec k}_{\vec i} =$$

$$\det\begin{bmatrix} i & -\frac{5}{2}\sin(\theta) & 0 \\ j & \cos(\theta) & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec i\,5\cos(\theta) - \vec j\left(-\frac{5}{2}\sin\theta\right) + 0\,\vec k$$

$$\boxed{\vec i\,5\cos(\theta) + \frac{5}{2}\vec j\,\sin\theta}$$

concorde con $\Gamma(\theta,z)$

$$\vec N_\Gamma(\theta,z) = \cos\theta\,\vec i + \frac{5}{2}\sin\theta\,\vec j$$

SI VEDE CHE $\vec N_\Gamma(\theta,z) \doteq \hat\nu(\Gamma(\theta,z))$
$\uparrow$ uso ∇G_1

LO DIAMO PER BUONO
- SI VEDE . .

$$\phi(\vec g, L, \hat\nu) = \iint_W \vec g(\Gamma(\theta,z))\cdot\vec N_\Gamma(\theta,z)\,d\theta\,dz =$$

$(W = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 4\})$

$$\iint_W 2z\left(\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\cos(\theta)\,\vec i + 5\sin(\theta)\,\vec j\right)\left(5\cos(\theta)\,\vec i + \frac{5}{2}\sin\theta\,\vec j\right)d\theta\,dz$$

$$2\int_0^4 z\,dz\int_0^{2\pi}\left(25\cos^2(\theta) + + \frac{25}{2}\sin^2\theta\right)d\theta =$$

$$2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4\int_0^{2\pi} 25\left(\cos^2(\theta) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(\theta)\right)d\theta =$$

$$25\cdot 256\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\right)d\theta = 25\cdot 256\int_0\left(\frac{1}{2}\,\frac{\cos 2\theta + 1}{2} + \frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$25\cdot 256\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)2\pi = 25\cdot 128\,\pi\,(3) = \cdot\ \cdot$$

Ci sono degli errori di calcolo - lo rivediamo la prossima volta.

LA PROSSIMA VOLTA VEDIAMO SE TORNA CON IL T. DIVERG.

$$\Phi(\vec{f}, L) + \Phi(\vec{f}, S) + \Phi(\vec{f}, B) = \Phi(f, \partial D) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz$$

???