Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 62 07/05/2025

COMPITINO 30/05 ORE 15.30 aula F9

TEOR. (DIVERGENZA)

$D \subset \mathbb{R}^3$ dominio reg. a tratti, Ω aperto $D \subset \Omega$, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. Allora

$$\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\, dy\, dz$$

DOVE $\hat{\nu}(P)$ è la normale a ∂D, uscente da D, $(P \in \partial_{reg} D)$

CENNO DI DIM. CASO PARTICOLARE: D è un insieme normale rispetto a tutti 3 gli assi:

$$D = \{(x,y) \in B_1 : g_1(x,y) \le z \le h_1(x,y)\} = \qquad B_1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$\{(x,z) \in B_2 : g_2(x,z) \le y \le h_2(x,z)\} = \qquad B_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$\{(y,z) \in B_3 : g_3(y,z) \le x \le h_3(y,z)\} \qquad B_3 \in \mathbb{R}^3$$

Per esempio $D =$ palla / cubo / parallelepiped.

SOTTO QUESTA IPOTESI:

$$\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$$

Integriamo su $D \cdot \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$ (un pezzo della divergenza)

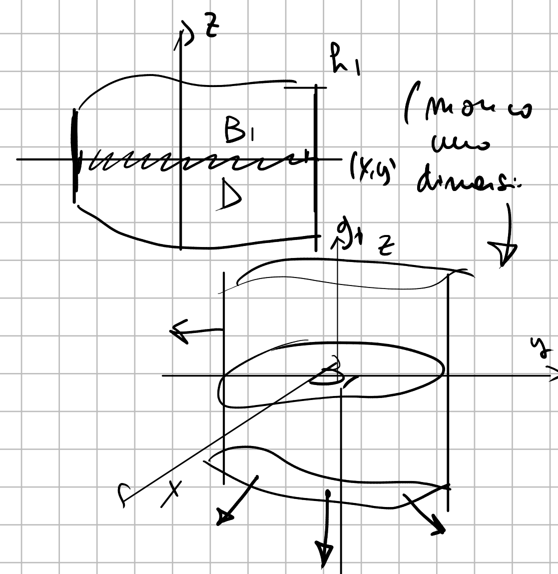
$$\iiint_D \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \underset{\uparrow}{=} \iint_{B_1} \left(\int_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dz \right) dx\,dy =$$

uso la prima decomposizione

$$\iint_{B_1} \left[f_3(x,y,h_1(x,y)) - f_3(x,y,g_1(x,y)) \right] dx\,dy = \circledast$$

$$\circledast \overset{??}{=} \iint_{\partial D} (f_3 \vec{k}) \hat{\nu}\,d\sigma$$

↑ IN EFFETTI :



(manca una dimensione)

$$\partial D = \{(x,y,z) : (x,y) \in B_1,\ z = g_1(x,y)\} \cup$$
$$\{(x,y,z) : (x,y) \in B_1,\ z = h_1(x,y)\} \cup$$
$$\{(x,y,z) : (x,y) \in \partial B_1,\ g_1(x,y) \le z \le h_1(x,y)\} = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

Se $(x,y,z) \in F_1 \Rightarrow \hat{\nu}(x,y,z) = -\left(-\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} \right) =$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\,\vec{j} - \vec{k}$$

Se $(x,y,z) \in F_2 \Rightarrow \hat{\nu}(x,y,z) = -\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} - \dfrac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)\,\vec{j} + \vec{k}$

Se $(x,y,z) \in F_3 \Rightarrow \hat{\nu}(x,y,z) = \underset{\uparrow}{\nu_1(x,y)} + 0\,\vec{k}$

normale a ∂B_1 uscente da B_1 (trasferito in $\mathbb{R}^3$)

Vediamo com'è fatto $\displaystyle\iint_{\partial D} (f_3 \vec{k})\, \hat{\nu}\; d\sigma =$

$$\iint_{F_1} + \iint_{F_2} + \iint_{F_3}$$

uso la parametrizzazioni grafico

$=0$ perché $\hat{\nu} \cdot \vec{k} = 0$ su F_3

$$\iint_{B_1} f_3(x,y,g_1(x,y))\,\vec{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{j} - \vec{k} \right) dx\,dy \;+$$

$$\iint_{B_1} f_3(x,y,g_1(x,y))\,\vec{k} \cdot \left(-\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} - \frac{\partial h_1}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} \right) dx\,dy \;=$$

$$-\iint_{B_1} f_3(x,y,g_1(x,y))\,dx\,dy \;+\; \iint_{B_1} f_3(x,y,h_1(x,y))\,dx\,dy$$

$\Uparrow$

è proprio l'espressione $(*)$ di prima. DUNQUE

$$\iiint_D \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \Phi\left(f_3\vec{k},\, \partial D,\, \hat{\nu} \right)$$

Se faccio gli stessi conti con $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ trovo le formule

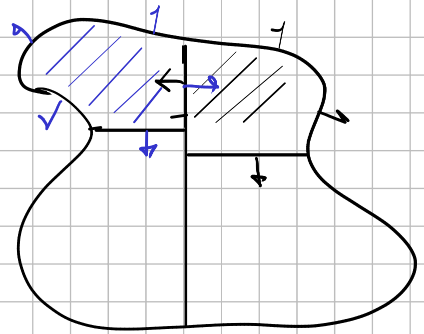
$$\iiint_D \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \Phi\left(f_2\vec{j},\, \partial D,\, \hat{\nu} \right)$$

$$\iiint_D \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \Phi\left(f_1\vec{i},\, \partial D,\, \hat{\nu} \right)$$

$\Rightarrow$ (SOMMANDO) $\displaystyle\iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\; dx\,dy\,dz = \Phi\left(\vec{f},\, \partial D,\, \hat{\nu} \right)$

#

Nel caso generale posso "decomporre D" in insiemi del tipo sopra:



(IN 2D ma 3D ..)

NOTO CHE NELLE "SUPERFICI" ADIACENTI I "FLUSSI SI CANCELLANO"

ESERCIZIO

$$D = \{ 4x^2 + y^2 \leq 25 ,\ z \geq 0 ,\ z^2 \leq 4x^2 + y^2 - 9 \}$$

$$\vec{f} = 2z (2x \vec{i} + y \vec{j})$$

COME È FATTO D? e ∂D ??.

D è regolare a tratti: $D = \{ G_1 \leq 0, G_2 \leq 0, G_3 \leq 0 \}$ dove

$G_1(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 25$, $G_2(x,y,z) = -z$, $G_3(x,y,z) = z^2 - 4x^2 - y^2 + 9$

Andrebbe verificata l'ipotesi di non tangenza (CI CREDIAMO)

$$\partial D = \{ 4x^2 + y^2 = 25,\ z \geq 0,\ z^2 \leq 4x^2 + y^2 - 9 \} \cup$$
$$\{ z = 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 25,\ 0 \leq 4x^2 + y^2 - 9 \} \cup$$
$$\{ 4x^2 + y^2 \leq 25,\ z \geq 0,\ z^2 = 4x^2 + y^2 - 9 \} =$$

$$\{ 4x^2 + y^2 = 25,\ z \geq 0,\ z \leq \sqrt{4x^2 + y^2 - 9} \} \cup \quad \leftarrow \{ (x,y) \in \partial B,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$$
$$\{ z = 0,\ 9 \leq 4x^2 + y^2 \leq 25 \} \cup \quad \leftarrow \{ (x,y) \in B \quad z = g(x,y)$$
$$\{ 4x^2 + y^2 \leq 25,\ z \geq 0,\ z^2 = 4x^2 + y^2 - 9 \} = \leftarrow \{ (x,y) \in B \quad z = h(x,y) \}$$

Noto che D è normale rispetto all'asse z (al piano x,y):

Prendo $B = \{ 9 \leq 4x^2 + y^2 \leq 25 \}$ $\Longrightarrow$

$g(x,y) = 0 \qquad h(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 9}$

$$\boxed{D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B ,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \}}$$

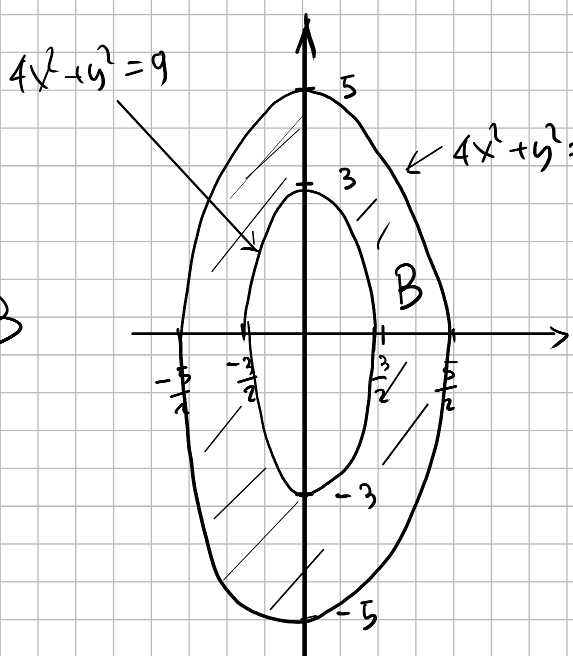
$$D = \{ 4x^2 + y^2 \leq 25 \ , z \geq 0 \ , \ z^2 \leq 4x^2 + y^2 - 9 \}$$

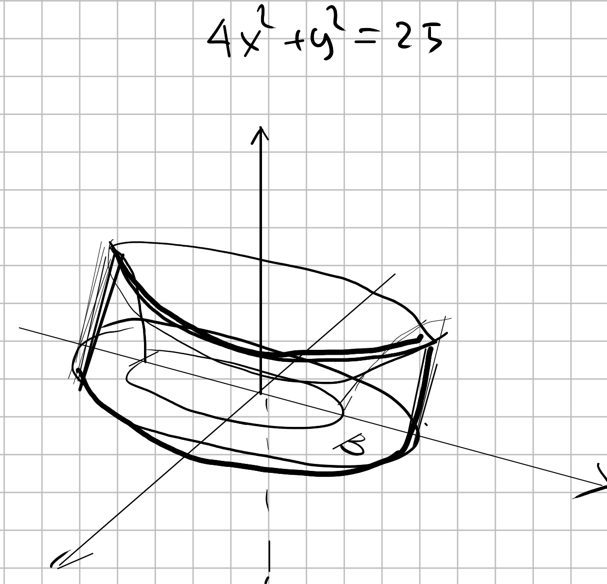
Se $(x,y,z) \in D \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 \leq 25 \quad$ e $\quad 0 \leq z^2 \leq 4x^2 + y^2 - 9$

$\Rightarrow \quad (x,y) \in B \qquad$ INOLTRE $\qquad 0 \leq z \leq \sqrt{4x^2 + y^2 - 9}$

VICEVERSA se $(x,y) \in B$ e $g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \Rightarrow$ valgono le disuguaglianze che definiscono D

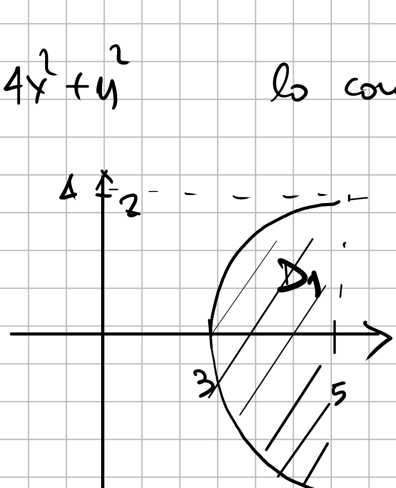
B





$\rho^2 = 4x^2 + y^2 \qquad$ la condizione $\quad z^2 \leq 4x^2 + y^2 - 9 \quad$ diventa

$$z \leq \sqrt{\rho^2 - 9}$$



D è ottenuto "ruotando" D_1 attorno all'asse z

Continuiamo domani!