Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 61 05/05/2025

SUPERFICI - FINO AD ORA "PARAMETRICHE"

VEDIAMO LA DEF. PIÙ GENERALE DI "SUPERFICIE"

DEF. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Dico che S è una "SUPERFICIE" (generale / non parametrica) se S è CONNESSA (LA CONNESSIONE ANDREBBE MESSA ANCHE NEL CASO PARAMETRICO) e inoltre

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_K$$

dove $S_1, \dots, S_K$ sono superfici parametriche e si ha:

(1) $$S_i \cap S_j \subset \Sigma'(S_i) \cap \Sigma'(S_j) \qquad i \neq j$$

(2) se i, j, h sono indici distinti
$S_i \cap S_j \cap S_h$ è un insieme finito

La (1) dice che le S_i si "incollano sui bordi", la (2) dice che ci sono solo un numero finito di "punti tripli"

PER (FACCIO SOLO DEI DISEGNI)

- La sfera $S_R = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ $(R>0)$ NON È una sup parametrica (anche se questo non è ovvio)
Per vedere S_R come superficie posso incollare: due emisferi sull'equatore

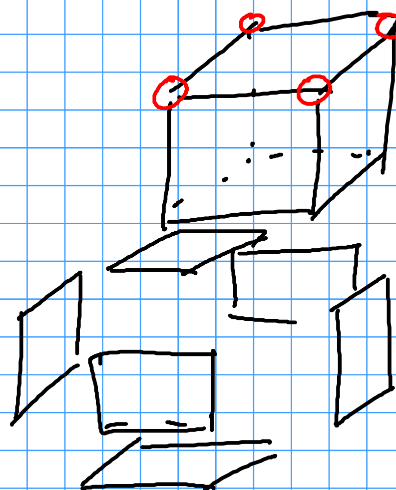
$S^+ = \{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\}$ = grafico di $g^+(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$S^- = \{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\leq 0\}$ = grafico di $g^-(x,y)=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\Sigma(S^+)=\Sigma(S^-)=\{x^2+y^2=R^2,\ z=0\}$$

- LA SUP. LATERALE DEL CUBO: $S := \partial Q$ dove Q è dato da

$$Q=\{-1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1,\ -1\leq z\leq 1\}$$



Posso descrivere S come unione delle 6 facce

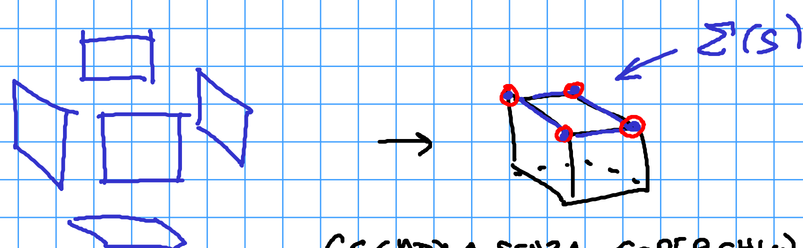
(in questo caso ci sono punti "TRIPLI", cioè i vertici.

Se tolgo una delle facce del cubo ho un'altra superficie che corrisponde alla "scatola senza coperchio"

- In questo caso dico che $S_1 \dots S_K$ è una "decomposizione di S"
- Dico che S è "regolare a tratti" se ogni S_i della decomposizione ammette una parametrizzazione $\Gamma \in C^1(\overline{W})$ (Γ regolare fino al bordo)
- Chiamo "BORDO DI S" l'insieme

chiusura

$$\Sigma(S) = \overline{\bigcup_{i=1}^{K} \{p\in\Sigma(S_i),\ p\notin\Sigma(S_j) \text{ se } j\neq i\}}$$



(SCATOLA SENZA COPERCHIO)

PUÒ SUCCEDERE CHE $\Sigma(S)=\emptyset$ (per esempio se S = sfera)

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\Sigma(S)$ <u>NON DIPENDE</u> dalla suddivisione scelta per descrivere S.

- DICO CHE $P \in S$ è punto regolare se vale una delle due:

(1) $\exists$ decomposizione $S_1 \dots S_K$ tale che $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$ per uno i $(\Rightarrow P \notin \Sigma'(S))$

(2) $P \in \Sigma'(S)$ ed esiste una decomposizione $S_1 \dots S_K$: $P \in \Sigma'(S_i) \setminus \Sigma^*(S_i)$

Per esempio se $S = S_R = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ tutti i punti sono regolari. Infatti se divido $S_R = S^+ \cup S^-$ ottengo che gli eventuali punti non regolari sono contenuti in $\{x^2+y^2 = R^2, z=0\} = E_q$. Però posso trovare un'altra decomposizione

$$S' = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, \ z \geq R/2\} \qquad S'' = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, \ z \leq R/2\}$$

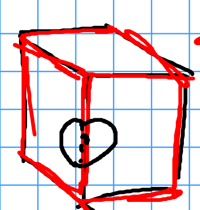
Con questa decomposizione $E_q \subset S' \setminus \Sigma(S')$

Dunque anche i punti di E_q sono regolari.

Nel caso $S = \partial Q$ si può vedere che i punti regolari sono tutti e soli quelli "interni alle facce" – cioè non sono regolari i punti degli spigoli (che comprendono i vertici)

- Se P non è regolare dico che P è "singolare"

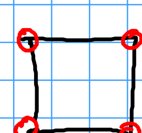
INDICO CON $\Sigma^*(S)$ = insieme dei punti singolari



$\Sigma^*(S)$

(non è una dimostrazione)

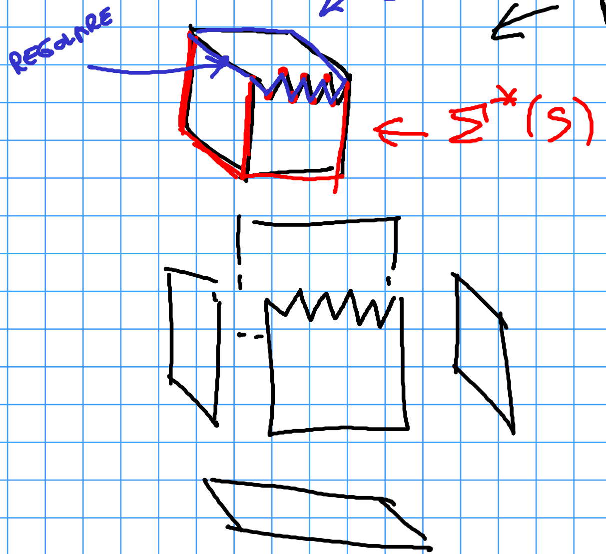
- ESEMPIO Se S è parametrica (c'è una decomposizione che coincide con S) $\Rightarrow$

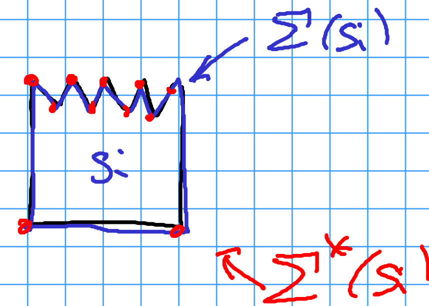


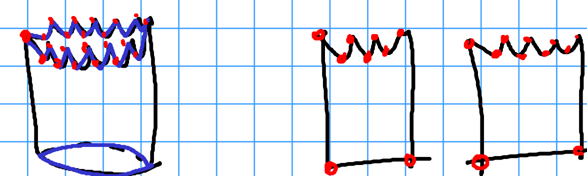
S

SONO SINGOLARI

$\Sigma'(S)$ (compresi i puntini dello seghettato) ← MANCA IL COPERCHIO (È UN "SACCHETTO")







Dato un punto regolare $P \ (\in S \setminus \Sigma^*(S))$ posso definire

PIANO TANGENTE / RETTA NORMALE /

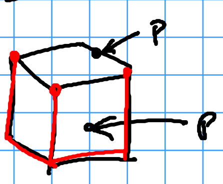
$T_S(P) = T_{S_i}(P)$ dove $P \in S_i \setminus \Sigma'(S_i)$

$N_S(P) = N_{S_i}(P)$

DUNQUE SCELGO UNA DECOMPOSIZIONE $S_1 \dots S_k$ per S tale che $P \in S_i$ e $P \notin \Sigma^*(S_i)$ $\Rightarrow$ uso il piano tang. e la retta normale per S_i per definire $T_S(P)$ e $N_S(P)$

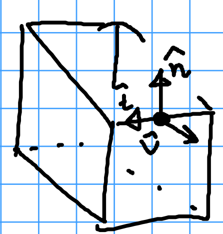
- se $S = S_R$ ogni punto P è regolare $(\Sigma'(S) = \emptyset)$

- $S =$ scatola aperta $\Rightarrow$ P regolare è di due tipi

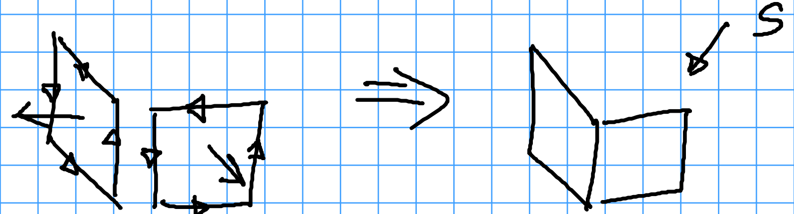


- Nello stesso modo, se P è regolare e $P \in \Sigma(S)$ (caso (2))
posso definire il vettore $\hat{n}(P)$ (vettore in $T(S)$ uscente da S)

DUNQUE NEI PUNTI REGOLARI DI $\Sigma(S)$ si può definire la terna $(\hat{n}, \hat{\nu}, \hat{t})$ come già visto $\hat{n}$ è ben definito, gli altri due devono essere tali che la terna è destrorsa ←
HO DUE SCELTE POSSIBILI. Se decido chi è $\hat{\nu}$ automaticamente ho fissato $\hat{t}$ (è tangente a $\Sigma(S)$ in P)



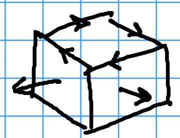
DEF. Sia S una sup regolare a tratti. DIRÒ CHE S è ORIENTABILE SE esiste una decomposizione $S_1 \cdots S_K$ tale che, su ogni S_i c'è un'orientazione $\hat{\nu}_i$ tale che "dove incollo i versi sono opposti"

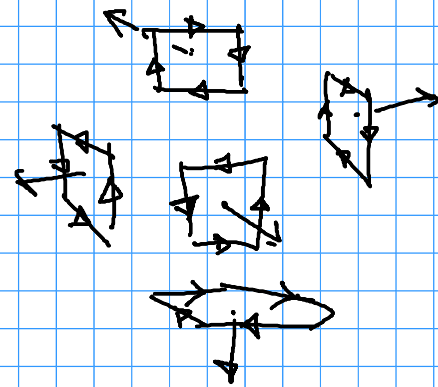


IN DETTAGLIO SE $P \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j) \Rightarrow$ il verso di $\Sigma(S_i)$ in P e il verso di $\Sigma(S_j)$ in P (INDOTTI DA $\hat{\nu}_i$ e $\hat{\nu}_j$)
Se S è orientabile chiamo orientazione una $\hat{\nu} : S \setminus \Sigma^*(S) \to \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{\nu}(P) = \hat{\nu}_i(P)$ . . . . Dico che $(S, \hat{\nu})$ è una sup. (reg. a tratti) ORIENTATA
Se $(S, \hat{\nu})$ è orientata $\Rightarrow$ "INDUCO su $\Sigma(S)$ un verso" che corrisponde al verso dei $\Sigma(S_i)$ $(S = S_1 \cup \cdots \cup S_K)$

SOSTANZIALMENTE il verso di $(S, \hat{\nu})$ è "ereditato" dai versi dei bordi delle S_i, nei punti che NON VENGONO INCOLLATI

- LA SCATOLA APERTA È ORIENTABILE





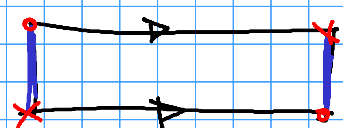
~ per ogni punto di $\Sigma(S) \setminus \Sigma^*(S)$ è definita la terna destra $(\hat{n}, \hat{\nu}, \hat{t})$.

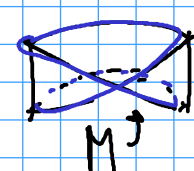
Si può anche vedere che $\Sigma(S)$ è l'unione dei sostegni di un numero finito di curve chiuse regolari a tratti γ_i

(IN GENERALE) se S è orientata da $\hat{\nu}$ $\Rightarrow$ γ_i' è concorde con $\hat{t}$ (se $P = \gamma_i(t) \Rightarrow \hat{t}(P) = \dfrac{\gamma_i'(t)}{\|\gamma_i'(t)\|}$)

- <u>OSS.</u> CI SONO SUPERFICI NON ORIENTABILI:

il nastro di Möbius M:





$\Sigma(M)$ è descritto da un'unica curva

NON È POSSIBILE METTERE UN'ORIENTAZIONE SU M

<u>TEOREMA</u> Se D è un dominio regolare ($D = \{G_1 \le 0 \dots G_k \le 0\}$ + IPOTESI DI NON TANGENZA) $\Rightarrow$ $S = \partial D$ è una superficie regolare a tratti, senza bordo: $\Sigma(S) = \emptyset$. Inoltre i punti regolari di S coincidono con i punti di $\partial_{reg} D$

Inoltre S è orientabile e si può scegliere come orientazione la normale uscente da D:

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$$ dove i è l'unico indice per cui $G_i(P) = 0$ (se c'è una sola $G \Rightarrow \Sigma^*(S) = \emptyset$)

- ESEMPIO $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ ← MEZZO DISCO

$\partial D = \{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\} \cup \{x^2+y^2\leq 1, z=0\} =$

$\partial D \setminus \partial_{reg} D = \{x^2+y^2=1, z=0\} = \Sigma^*(\partial D)$

- ESEMPIO $S = \partial Q$ $Q =$ CUBO . . .

$\Sigma^*(S) = \{$spigoli$\}$

DEF. Se S è una superficie (generale) e $f: S \to \mathbb{R}$ continua è ben definito $\int_S f\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} f\, d\sigma$

dove $S_1 .. S_k$ è una decomposizione. $\int_S f\, d\sigma$ NON DIPENDE dalla decomposizione

DEF Se $(S, \hat{\nu})$ è una sup reg a tratti orientata e $\vec{f}: S \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è ben definito $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \int_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \vec{f}\cdot\hat{\nu}_i\, d\sigma$ dove

$(S_i, \hat{\nu}_i)$ è una decomposizione (orientata) di $(S, \hat{\nu})$

ANCHE Φ (IL FLUSSO DI $\vec{f}$ attraverso $(S,\hat{\nu})$) non dipende dalla decomposizione.

- IN PARTICOLARE $\text{Area}(S) = \int_S 1\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \text{Area}(S_i)$

Def Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è C^1 chiamo divergenza di $\vec{f}$

l'espressione $\text{div}\, \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

($\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ scrittura suggestiva perché $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$)

TEOREMA (della divergenza) Se D è un dominio reg. a tratti, $S = \partial D$ $\hat{\nu}$ è la normale unitaria uscente (definita su $\partial_{reg}(D) = S \setminus \Sigma^*(S)$). Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è un campo C^1 definito su un aperto Ω con $D \subset \Omega$ $\Longrightarrow$

$$\left(\int_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma =: \right) \Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy\,dz$$