Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 60   30/04/2025

Considero la serie trig. complessa:

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{2int}$$

Diamo per buono che converge PUNTUALMENTE (NON ABBIAMO CRITERI ...)

NON SI PUÒ APPLICARE: $\sum |c_n| < +\infty \Rightarrow$ conv. unif

dato che in questo caso $c_n = |c_n| = \frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

PERIODO ??   Qui $\omega = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

f è reale ?? $c_{-n} = \overline{c_n}$ IN QUESTO CASO

$c_{-n} = -c_n \neq \overline{c_n} = c_n$ (c_n è reale !!)

NO $f(t) \notin \mathbb{R}$

POSSO DIMOSTRARE CHE f è IMMAGINARIA, DISPARI

infatti se prendo $g(t) = i f(t)$

i coeff di g sono $i c_n =: d_n$

$$d_{-n} = i c_{-n} = -i c_n = \overline{i c_n} = \overline{d_n}$$

$\Rightarrow g$ è reale !! $\Leftrightarrow f$ è immaginaria pura ($f = -i g$)

Inoltre dato che $c_{-n} = -c_n \Leftrightarrow f$ è dispari

Energia di f $\int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ e dunque

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \boxed{\pi \sum \frac{n^2}{1+2n^2+n^4}}$$

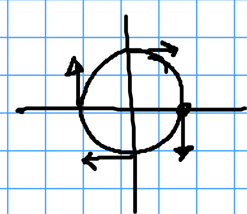
(nella correzione del 24/4/21 c'è un errore)

$e_n = e^{in\omega t}$

$$\left(f = \sum c_n e_n \quad \|f\|_2^2 = \sum \|e_n c_n\|^2 = \sum |c_n| \|e_n\|^2 = T \sum |c_n|^2 \quad , \quad \|e_n\|^2 = \int_0^T e_n \bar{e}_n \, dt = \int_0^T |e_n|^2(t)\, dt = \int_0^T 1 \, dt = T \right)$$

CONSIDERO

$$\vec{f}_1(x,y) = \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2+y^2}$$



$\vec{f}_1$ CONSERVATIVO ?? $\boxed{\text{NO}}$ - L'abbiamo visto a lezione:

$\vec{f}_1$ è irrotazionale, ma $\int_\gamma \vec{f}_1 \cdot d\vec{s} = -2\pi \neq 0$

con γ circonferenza di centro l'origine

N.B. Ne posso dedurre che $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO (se no ogni campo irrotazionale su Ω sarebbe conservativo)

$$\vec{f}_2(x,y) = \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{x^2+y^2}$$

$\vec{f}_2$ è conservativo: NO   Vedo che non è irrotazionale

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-x\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \neq \quad (\text{c'è il MENO !!})$$

Potrei anche ragionare in un altro modo: CERCO $F(x,y)$:

$$\nabla F = \vec{f}_2 \iff \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y}$$

Dalla prima $\Rightarrow$ $F = \int \frac{x}{x^2+y^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + c(y)$

$$y = x^2+y^2 \qquad dy = 2x\, dx$$

Vedo se posso fare in modo che F verifichi la seconda:

$$\frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c(y)\right) = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y)$$

$$\iff c'(y) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$$ ← a destra ho qualcosa che dipende da x

NON POSSO TROVARE $c(y)$

LA DOMANDA ORIGINALE ERA

$\vec{f}_2$ è radiale ?? $\qquad \left(\vec{f}_2 = \phi(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{(\vec{i}x + \vec{j}y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

<u>NO</u> perchè non è conservativo (se fosse radiale $\Rightarrow$ sarebbe cons.)

$$\vec{f}_3(x,y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$$

$\vec{f}_3$ è IRROTAZIONALE <u>SI</u>

Posso fare i conti (come nel caso di $\vec{f}_2$, solo che ora i segni tornano)

OPPURE NOTO CHE $\vec{f}_3$ è <u>RADIALE</u> ($\Rightarrow$ conservativo)

$$\vec{f}_g = \underbrace{\frac{1}{\|(x,y)\|}}_{\phi(\|(x,y)\|)} \left(\frac{x}{\|(x,y)\|} \vec{i} + \frac{y}{\|(x,y)\|} \vec{j} \right) \qquad \varphi(r) = \frac{1}{r}$$

$$\left(\phi(r) = \frac{1}{r} \right)$$

$\Rightarrow$ UN potenziale per $\vec{f}_g$ è $\varphi(\|(x,y)\|)$ dove $\varphi' = \phi$

e cioè $\ln(\|(x,y)\|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$ $(+ \text{cost.})$

EQ. DIFF.

$$(x^2+2x)y'' + (4x-6)y' + 2y = -24 + 120x^3$$

Cerco $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)x^n$

$$y'' = \sum_0^\infty a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1} \quad (= \ldots$$

IMPONGO L'EQ. $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^\infty x^n \left(a_n n(n-1) + 2a_{n+1}(n+1)n + 4a_n n - 6a_{n+1}(n+1) + 2a_n \right) =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ a_{n+1}(n+1)(2n-6) + a_n(n^2-n+4n+2) \right\} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ 2a_{n+1}(n+1)(n-3) + a_n(n^2+3n+2) \right\} x^n =$$

$$n^2+3n+2=0 \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ a_{n+1} 2(n+1)(n-3) + a_n(n+1)(n+2) \right\} x^n$$

OTTENGO

$$(n+1)\left[2(n-3)a_{n+1} + (n+2)a_n \right] = b_n := \begin{cases} -24 & \text{se } n=0 \\ 120 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $n+1 \neq 0 \ \forall n$ posso anche scrivere

$$(R) \qquad 2(n-3)\,a_{n+1} = -(n+2)\,a_n + \frac{b_n}{n+1}$$

Se $\underline{n=3}$ ottengo $0 = -5\,a_3 + \frac{b_3}{4} \iff a_3 = \frac{b_3}{20} = 6$

$\boxed{a_3 = 6}$ (obbligatorio!)

Se $n \geq 4$ posso scrivere $\boxed{a_{n+1} = -\frac{(n+2)\,a_n}{2(n-3)} \qquad \forall n \geq 4}$

Se $n = 2 \Rightarrow a_3 = -\frac{4\,a_2}{-2} \iff a_2 = 2\,a_3 =$

. . .

(VEDETE LA FINE SULLA CORREZIONE ONLINE)

DOVREBBE VENIRE $\boxed{a_2 = 3}$ $\boxed{a_1 = 4}$ $\boxed{a_0 = 0}$

Quindi

$$y(x) = 4x + 3x^2 + 6x^3 + a_4 x^4 + \sum_{n=5}^{\infty} a_n x^n$$

libero

Se impongo $y^{(4)}(0) = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 4$

e la soluzione si riduce a $y(x) = 4x + 3x^2 + 6x^3$