Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 59 28/04/2025

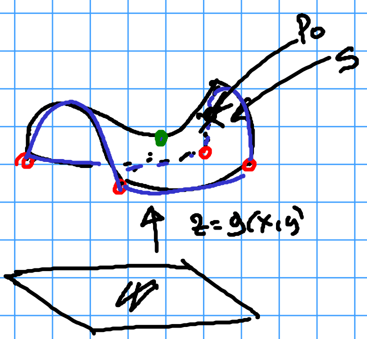
ESEMPIO $S := \{ (x,y,z): \ |x| \le 1, |y| \le 1 \quad z = x^2 - y^2 \}$

S è grafico della funzione $g(x,y) = x^2 - y^2$ su $\underbrace{\{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}}_{W}$

$(g: W \to \mathbb{R})$

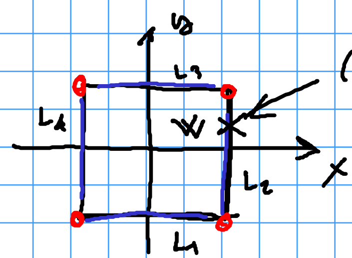
Dunque posso considerare la parametrizzazione $\Gamma: W \to \mathbb{R}^3$ def. da

$\Gamma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = (x, y, x^2 - y^2)$



$\Sigma(S) = \{ (x,y,z): (x,y) \in \partial W \quad z = x^2 - y^2 \}$

$\partial W = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$



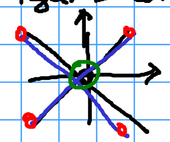
(x_0,y_0) $L_1 = \{ (x, -1) \quad |x| \le 1 \}$

$L_3 = \{ (1, y) \quad |y| \le 1 \}$

$L_3 = \{ (x, 1) : \quad |x| \le 1 \}$

$L_4 = \{ (-1, y) \quad |y| \le 1 \}$

Se taglio S con il piano $z=0$



(x,y) è punto singolare di $\partial W \iff (x,y) \in \{ (\pm 1, \pm 1) \}$ (4 punti)

$\partial_{reg} = \partial W \setminus \{$ quattro vertici $(\pm 1, \pm 1) \}$

• È chiaro che Γ è $C^1(W)$ non solo su $\mathring{W}$. In realtà

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è C^1 dunque la sua restrizione a W è C^1

$\Rightarrow \Sigma^*(S) = \{$ punti che provengono dai vertici di $W \} =$

$\{ (\pm 1, \pm 1, (\pm 1)^2 - (\pm 1)^2) \} = \{ (\pm 1, \pm 1, 0) \}$

$\Sigma(S) \setminus \Sigma^{*}(S)$ = il resto

Per esempio $x = 1$ $y = 1/2$ cioè $P_0 = (1, 1/2, 3/4) \in \Sigma(S) \setminus \Sigma^{*}(S)$

Vediamo come è fatto $T_S(P_0)$ e $N_S(P_0)$

$N_S(P_0)$ è generato da $\vec{N}_\Gamma(x_0, y_0)$ $(x_0, y_0) = (1, 1/2)$

$$\vec{N}_\Gamma(x_0,y_0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1/2)\,\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1/2) + \vec{k} =$$

$$-2x\Big|_{x=1,\, y=1/2} \vec{i} + 2y\Big|_{x=1\, y=1/2} + \vec{k} = \boxed{-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$$

UN VETTORE NORMALE A S in P_0

$$N_S(P_0) = \{ -2\lambda\vec{i} + \lambda\vec{j} + \lambda\vec{k},\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$T_S(P_0) = N_S^{\perp}(P_0)$ o anche $T_S(P_0) = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}$

$=$ IMMAGINE DI $\mathbb{R}^2$ tramite $J_\Gamma(x_0, y_0)$

perché $J_\Gamma = \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \middle| \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right] \Rightarrow J_\Gamma\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial y}$

DUNQUE

$$T_S(P_0) = \left\{ \lambda\left(\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\,\vec{k}\right) + \mu\left(\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\,\vec{k}\right),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{ \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + (2\lambda - \mu)\vec{k},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ in $x = 1, y = 1/2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2$

$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$ " " $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -1$

- $$\boxed{T_S(P_0) = \{ \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + (2\lambda - \mu)\vec{k},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}}$$

Controlliamo che T_S e N_S sono ortogonali:

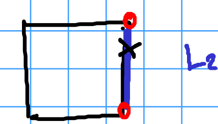
$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ prendo $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + (2\lambda - \mu)\vec{k}$ e $\vec{w} = \nu(-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

e faccio $\vec{v}\cdot\vec{w} = -2\lambda v + \mu v + (2\lambda-\mu) v = 0$ TORNA

- Voglio trovare $T_{\Sigma(S)}(P_0)$ e $\hat{n}(P_0)$ che generano $T_S(P_0)$

$T_{\Sigma(S)}(P_0) = J_\Gamma(x_0,y_0)$ (retta tangente a ∂W in (x_0,y_0))

$(x_0,y_0)=(1,1/2) \in L^2$. L_2 è descritto dalla curva $\gamma(t)$:
che ha come sostegno il segmento da $(1,-1)$ e $(1,1)$



$\gamma(t) = (1,-1) + t\big((1,1)-(1,-1)\big) = (1,-1) + t\,(0,2)$

$\gamma'(t) = 2\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Posso fare in due modi

(per trovare un vettore tangente a $\Sigma(S)$ in P_0)

- Prendo $J_\Gamma(x_0,y_0)\,\gamma'(t_0)$ dove t_0 tale che $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$
e cioè $-1+2t_0 = 1/2 \iff -2+4t_0 = 1$ $\boxed{t_0 = 3/4}$

(in realtà t_0 non mi serve dato che $\gamma'(t)$ è costante)

DUNQUE considero $\hat{t} := \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}}_{J_\Gamma(1,1/2)} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}_{\gamma'(t_0)} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

- OPPURE posso considerare $\tilde{\gamma}(t) := \Gamma(\gamma(t)) =$

$$\Big(1,\ -1+2t,\ \underbrace{1-(-1+2t)^2}_{1-(1-4t+4t^2)}\Big) = (1,\ -1+2t,\ +4t-4t^2)$$

$\tilde{\gamma}(t) = (1, -1+2t, 4t-4t^2)$ (percorre $\Sigma(S)$ da $(1,-1,0)$ e $(1,1,0)$)

$\hat{t} = \tilde{\gamma}'(t_0) = (0,\ 2,\ 4-8t)\big|_{t=3/4} = (0,\ 2,\ 4-6)$

(dove essendo $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\Gamma(\gamma(t)) = J_\Gamma(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$) $= (0,2,-2)$

- DUNQUE $T_{\Sigma(S)}(P_0) = \{ 2\lambda\vec{j} - 2\lambda\vec{k} \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$
- Cerco $\hat{n}(P_0) \in T_S(P_0)$ e in $T_{\Sigma(S)}(P_0)^{\perp}$ $\quad \|\hat{n}(P_0)\| = 1$

e concorde con $J_\Gamma(x_0,y_0)\,\nu_W(x_0,y_0)$

$$\hat{n}(P_0) = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + (2\lambda-\mu)\vec{k}$$

$$\hat{n}(P_0)\cdot(2\vec{j} - 2\vec{k}) = 0 \iff 2\mu - 2(2\lambda-\mu) = 0$$

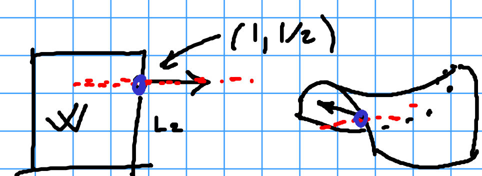
$$\iff 4\mu - 4\lambda = 0 \iff \lambda = \mu \qquad 2\mu - 4\lambda + 2\mu$$

$$\hat{n}(P_0) = \lambda\vec{i} + \lambda\vec{j} + \lambda\vec{k} = \lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\|\hat{n}(P_0)\| = 1 \qquad |\lambda|\sqrt{3} = 1 \qquad |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A OCCHIO VA SCELTO IL SEGNO + dunque $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vediamo però con la def. Devo prendere ν_W la normale a ∂W in $(1, 1/2)$ uscente da W.



$\nu_W = \vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ perché vicino a $(1, 1/2)$

W è dato da $G(x,y) \le 0$ dove $G(x,y) = x - 1$

e $\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Se APPLICO $J_\Gamma(1,1/2)$ a ν_W trovo $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

(Noto che $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ è la derivata della curva $\tilde{\gamma}$ ottenuta nel seguente modo: Considero $\gamma(t) = (1, 1/2) + t(1,0)$ e la trasferisco su S

$$\tilde{\gamma}(t) := \Gamma(\gamma(t)) = \begin{pmatrix}1+t\\1/2\\(1+t)^2 - 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t\\1/2\\t^2+2t+3/4\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{matrix}\text{per } t=0\\ \tilde{\gamma}(0) = P_0\end{matrix}\right)$$

$$\tilde{\gamma}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$)

DUNQUE devo scegliere λ in modo che $\hat{n}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} > 0$

dunque $\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$$\boxed{\hat{n}(P_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)}$$

INTEGRALE DI SUPERFICIE (di prima specie)

Def. Sia S una sup parametrica. Sia $f : S \to \mathbb{R}$ continua. Definisco

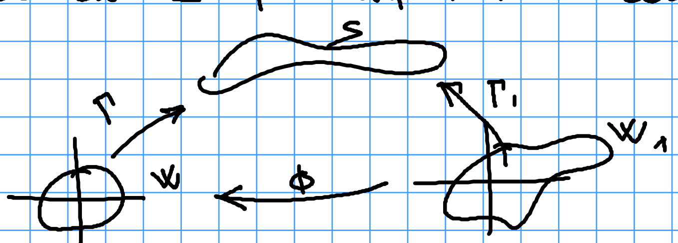
$$\iint_S f \, d\sigma := \iint_W f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

dove $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione per S.

ATTENZIONE CHE la quantità a destra è un "integrale improprio" che potrebbe divergere dato che $\|\vec{N}_\Gamma\|$ è definita solo in $\mathring{W}$ e potrebbe andare a $+\infty$ quando $(u,v) \to \partial W$. DUNQUE A RIGORE se $f \geq 0$ l'integrale è ben definito, ma può valere $+\infty$; se no l'integrale a destra è definito solo se $\iint_S |f| < +\infty$.

PERÒ se $\Gamma \in C^1$ fino al bordo il problema non si pone perché l'integrando è continuo su tutto W.

FATTO L'integrale non dipende dalla parametrizzazione: se $\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ è un'altra param. t.c. $\Gamma_1(W_1) = \Gamma(W) = S$ so che $\exists\, \phi : W_1 \to W$ cambio di parametrizzazione t.c. $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$.



Allora

$$\iint_{W_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \, \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\| \, du_1 \, dv_1 = \quad \text{(per quanto visto)}$$

$$\iint_{W_1} f(\Gamma(\phi(u_1,v_1)))\ \|\vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1)) \cdot \det J_\phi(u_1,v_1)\|\, du_1\, dv_1$$

USO LA SOSTITUZIONE $(u,v) = \phi(u_1,v_1)$ $\quad du\,dv = |J_\phi(u_1,v_1)|\,du_1\,dv_1$

$$= \iint_W f(\Gamma(u,v))\ \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\,du\,dv$$

<u>Def.</u> Area di $S := \iint_S 1\,d\sigma = \iint_W \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\,du\,dv$

<u>Per esempio</u> $S = \{ z = x^2 - y^2,\ |x| \le 1,\ |y| \le 1 \} \Longrightarrow$

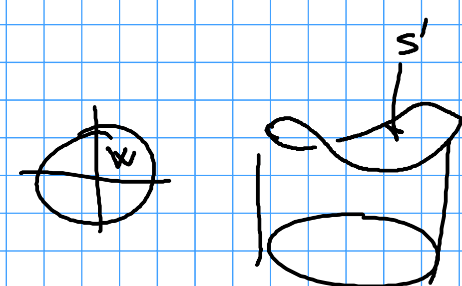
$$\text{Area}(S) = \iint_Q \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy =$$

$Q = \{ |x| \le 1,\ |y| \le 1 \}$, $\quad \Gamma(x,y) = (x, y, x^2-y^2)$

$$\vec{N}_\Gamma = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sembra un integrale complicato – cambio la superficie:

$S' = \{ z = x^2 - y^2 \quad x^2 + y^2 \le 1 \}$



Allora $\text{Area}(S') = \iint_B \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy$.

dove $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$. Passo in coordinate polari: $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$

$$\text{Area}(S') = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{4\rho^2+1}\ \rho\,d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4\rho^2+1}\ \rho\,d\rho$$

$s = \rho^2 \quad ds = 2\rho\,d\rho \quad \rightarrow \quad \pi \int_0^1 \sqrt{4s+1}\,ds = \pi \int_0^1 (4s+1)^{1/2}\,ds =$

$$\pi \left[(4s+1)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

" ORIENTAZIONE e FLUSSI " Se $P_0 \in \Sigma'(S) \setminus \Sigma^*(S)$

CASO IN CUI Γ è $C^1(W)$

ABBIAMO INDIVIDUATO $T_S(P_0)$, $T_{\Sigma(S)}(P_0)$ e $\hat{n}(P_0)$, $N_S(P_0)$

Voglio definire $\hat{\nu}(P_0)$ e $\hat{t}(P_0)$ in modo che $\hat{\nu}(P_0) \in N_S(P_0)$

$\hat{t}(P_0) \in T_{\Sigma'(S)}(P_0)$ e la terna $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{\nu})$ sia
$(\hat{\nu}, \hat{n}, \hat{t})$

destrorso, cioè l'applicazione lineare L t.c. $L\hat{e}_1 = \hat{n}$

$L\hat{e}_2 = \hat{t}$, $L\hat{e}_3 = \hat{\nu}$ abbia determinante > 0

$\left(L = \left[\hat{n} \,|\, \hat{t} \,|\, \hat{\nu} \right] \right)$ HO DUE POSSIBILITÀ

tra loro equivalenti. Per esempio scelgo $\hat{\nu}$ in $N_S(P_0)$ (HO DUE POSSIBILITÀ) e allora $\hat{t}$ è determinato

Dico che $(S, \hat{\nu})$ è una superficie parametrica orientata se $\hat{\nu}(P)$ è un versore in $N_S(P)$ - che è definito in TUTTI I PUNTI $P \in \Sigma'(S)$ (dato che Γ è C^1 !!)

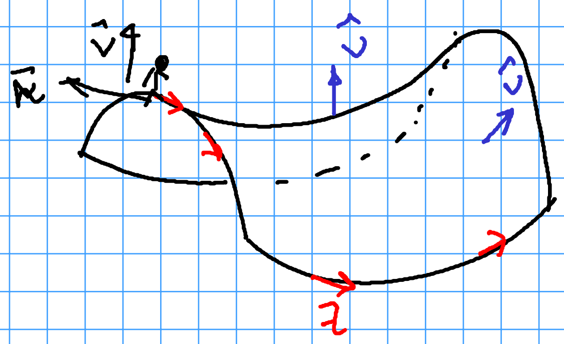
ATTENZIONE T_S e N_S SONO DEFINITI SU TUTTA S e dunque anche in $\Sigma'(S)$ (QUANDO $\exists\, \Gamma$ par. $C^1(W)$)

La possibilità di decomporre $T_S(P)$ in due si ha se P è in $\Sigma'(P) \setminus \Sigma^*(P)$.

DUNQUE UN'ORIENTAZIONE È UNA SCELTA CONTINUA di un verso della normale. (decido quali sono il "sopra" e il "sotto" della superficie S)

LA POTREI FARE ANCHE SE non ho Γ regolare fino al bordo (in tal caso $\hat{\nu}(P)$ lo posso prendere solo se $P \in S \setminus \Sigma(S)$)

FATTO: Se esiste Γ regolare fino al bordo e se ho scelto un'orientazione $\hat{\nu}$ su S $\Rightarrow$ automaticamente ho un campo di vettori $\hat{t}$ definiti su $\Sigma(S) \setminus \Sigma^*(S)$ tali che $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{\nu})$ sia destrorso.



si percorre $\Sigma(S)$, con la testa "verso l'alto" cioè concordo con $\hat{\nu}$ $\Rightarrow$ S la "tengo a sinistra"

LA SCELTA DELL'ORIENTAZIONE $\hat{\nu}$ DETERMINA IL VERSO $\hat{t}$ DEL BORDO

D'ORA IN POI LE SUPERFICI S SONO CONNESSE (se no la scelta dell'orientazione si moltiplica)

DEF. (FLUSSO) Se $(S, \hat{\nu})$ è una sup. par. orientata e $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ campo di vettori continuo, allora il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$ è definito da

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) := \iint_W \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv$$

DOVE Γ è una parametrizzazione "concorde con $\hat{\nu}$" CIOÈ $\vec{N}_\Gamma(u,v) = \lambda \hat{\nu}(P)$, $\lambda > 0$, $P = \Gamma(u,v)$

(Anche qui - se ammetto che Γ sia solo $C^1(\mathring{W})$ devo dire che l'integrale esiste solo se $\iint_S |\vec{f}|\, d\sigma < +\infty$

PERÒ IL PROBLEMA NON SI PONE SE Γ è $C^1(W)$)

SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ NON

DIPENDE DA Γ !! IN EFFETTI

Se $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi \Rightarrow$

$$\iint_{W_1} \vec{g}(\Gamma_1(u_1,v_1)) \cdot \vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\, du_1\, dv_1 =$$

$$\underbrace{\text{segno}(\det J_\phi)}_{\text{è costante su } W_1} \iint_{W} \vec{g}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv$$

Se però Γ_1 è "concorde con $\hat{\nu}$" deve essere $\det J_\phi > 0$.

<u>OSS.</u> se Γ è "discorde" con $\hat{\nu}$, basta cambiare il segno

INOLTRE è chiaro che

$$\phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) = \underbrace{\iint_S (\vec{g} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma}_{\text{INT. DI PRIMA SPECIE}}$$

$$\iint_W \vec{g}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv =$$

$$\iint_W \Bigg(\vec{g}(\Gamma(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\vec{N}(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}}_{\hat{\nu}(\Gamma(u,v))} \Bigg) \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\, du\, dv$$

perché Γ è concorde con ν

$$= \iint_W (\vec{g} \cdot \hat{\nu})(\Gamma(u,v))\, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\, du\, dv = \iint_S \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

#