Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 58 16/04/2025

Torniamo all'analisi del bordo di una sup. parametrica S

Ricorda $S \subset \mathbb{R}^3$, esiste $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ W reg. a tratti in $\mathbb{R}^2$

Γ parametrizzazione, $\Gamma(W) = S$. Allora $\Sigma(S) = \Gamma(\partial W)$

FATTO Se W è un dominio regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$

$(W = \{G_1 \leq 0, G_2 \leq 0, \dots, G_k \leq 0\}$ + ipotesi N.T. $)$

- Dato che siamo in $\mathbb{R}^2$ in ogni $P \in W$ si possono annullare al massimo DUE G_i (in $\mathbb{R}^2$ non ci sono TRE vett. lin. indip.)
- $\partial W = \{P : \exists i : G_i(P) = 0\}$

$\partial_{reg} W = \{P : \exists i : G_i(P) = 0, \ G_j(P) < 0 \text{ se } i \neq j\}$

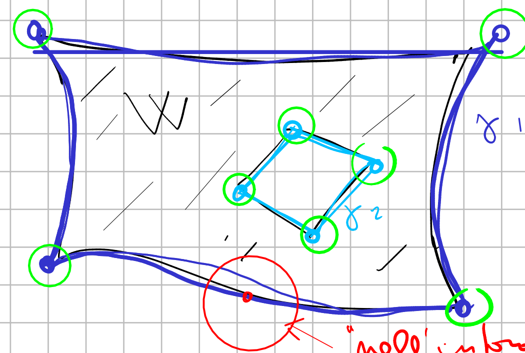
- Se $P \in \partial_{reg} W \Rightarrow$ esiste la normale uscente $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i P\|}$

dove G_i è l'unica che si annulla in P

- ALLORA SI PUÒ DIM. CHE

∂W è unione di un numero finito di archi chiusi regolari a tratti — in altri termini esiste un numero finito k di curve $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, γ_i reg. a tratti, chiuso tali che $\partial W = \bigcup_{i=1}^{K} \gamma_i([0,b])$)

(e chiediamo che $\gamma_i([0,b]) \cap \gamma_j([0,b]) = \emptyset$)



NON IN ∂reg

(ogni γ_i è incollamento di un numero finito di "tratti" |

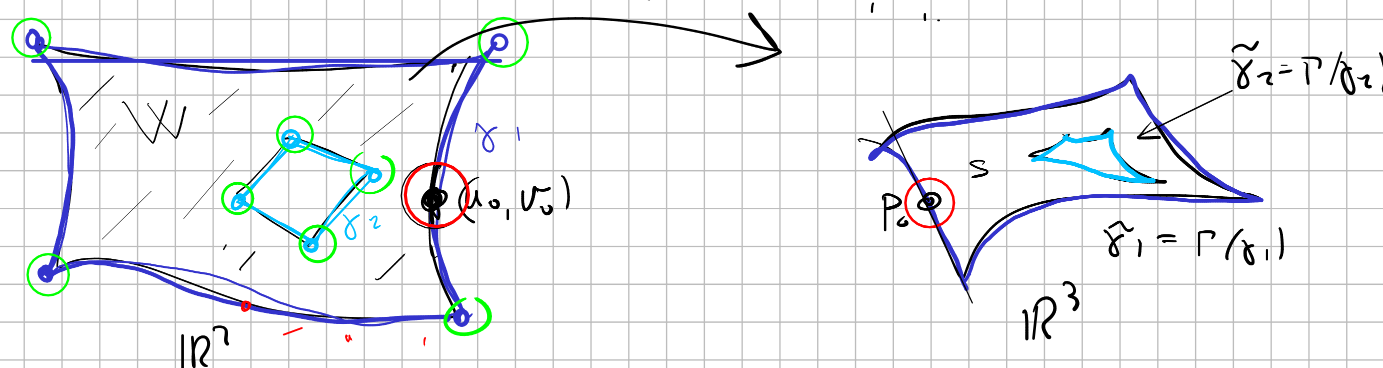
Conseguenza del DINI

"nell'intorno di un punto di ∂reg uso il Dini e trovo la curva"

- I punti singolari della frontiera sono i punti in cui le γ_i non sono derivabili - E SONO UN NUMERO FINITO

COME SI TRASFERISCONO QUESTE PROPRIETÀ SU $\Sigma'(S)$?

- IN GENERALE $\Sigma(S)$ è unione di un numero finito di archi chiusi



INFATTI SE prendo $\gamma_1 \dots \gamma_K$ che descrivono ∂W, e Γ una parametrizzazione $\Rightarrow$ posso definire

$$\tilde{\gamma}_i := \Gamma \circ \gamma_i$$

Queste $\tilde{\gamma}_i$ sono chiuse e sono continue (Γ è solo continua su ∂W). Se però $P_0 \in \Sigma(S)$ è <u>regolare</u>

(cioè $P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in \partial_{reg} W$ e Γ è C^1 in un intorno di (u_0, v_0) $\Rightarrow$ esiste una curva $\tilde{\gamma}$ C^1 che descrive $\Sigma(S)$ in un intorno di P_0 $\Rightarrow$ esiste il vettore tangente $\tilde{\gamma}'(t_0) = \vec{v}$ dove $\tilde{\gamma}(t_0) = P_0$ Chiamo retta tangente a $\Sigma(S)$ in P_0 la retta

$$T_{\Sigma(S)}(P_0) = \{\lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$ (Ho inventato la notazione

(Si vede che - se cambio la γ che descrive $\Sigma(S)$ vicino a P_0 trovo un altro vettore tangente che però genera la stessa retta)

$\Rightarrow$ $T_{\Sigma(S)}(P_0)$ è ben definito se P_0 è regolare

Oss. Se Γ è regolare fino al bordo Γ è $C^1(W)$ (invece di $C^1(\mathring{W})$)

$\Rightarrow$ $\Sigma^*(S)$ = immagine tramite Γ di $\partial W \setminus \partial_{reg} W$

$$\Sigma^*(S) = \Gamma(\partial W \setminus \partial_{reg} W)$$

e quindi $\Sigma^*(S)$ è fatto di un numero finito di pti.

- Ricordiamo anche che, se $p_0 \in \partial_{reg} W$, $p_0 = (u_0, v_0)$, esiste

$$\hat{\nu}(p_0) = \frac{\nabla G_i(p_0)}{\|\nabla G_i(p_0)\|} \quad \text{dove} \quad G_i(p_0) = 0 \quad G_j(p_0) < 0$$

Come mai $\hat{\nu}(p_0)$ è uscente?!

Se considero la retta

$$r(t) := p_0 + \hat{\nu}(p_0)\, t$$

abbiamo una retta che passa per p_0 per $t=0$. Consideriamo $\varphi(t) = G_i(r(t))$. Se $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ piccolo $\varphi(t)$ è ben definita, $\varphi(0) = G_i(p_0) = 0$,

$$\varphi'(t) = \nabla G_i(r(t)) \cdot r'(t) = \nabla G_i(r(t)) \cdot \hat{\nu}(p_0)$$

$$\varphi'(0) = \nabla G_i(p_0) \cdot \frac{\nabla G_i(p_0)}{\|\nabla G_i(p_0)\|} = \|\nabla G_i(p_0)\| > 0$$

Dunque $\varphi(t)$ è crescente se t è vicino a zero $\Rightarrow$

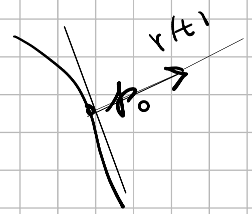
$\varphi(t) = G_i(r(t)) < 0$ se $-\varepsilon < t < 0$

$\varphi(t) = G_i(r(t)) > 0$ se $0 < t < \varepsilon$ $\leftarrow$ $r(t)$ esce da W per $t > 0$ piccolo

• Voglio costruire $\hat{n}(P_0) \in T_S(P_0)$, $\hat{n}$ perpendicolare a $T_{\Sigma(S)}(P_0)$ e "USCENTE" da S

Dato che $T_S(P_0)$ è un piano (di dim 2) e che $T_{\Sigma(S)}(P_0) \subset T_S(P_0)$ $\Rightarrow$ posso considerare la retta in $T_S(P_0)$ ortogonale a $T_{\Sigma(S)}(P_0)$,
Questa retta è generata da un vettore $\vec{m}$ $(\in T_S(P_0))$

COME DECIDO IL VERSO USCENTE?



Considero $p_0 \in \partial W_{\text{reg}}$: $\Gamma(p_0) = P_0$

considero $r(t) = p_0 + r\hat{\nu}(p_0)$ (quella di prima)

e ci applico Γ ottengo

$\gamma(t) = \Gamma(r(t))$ che è derivabile

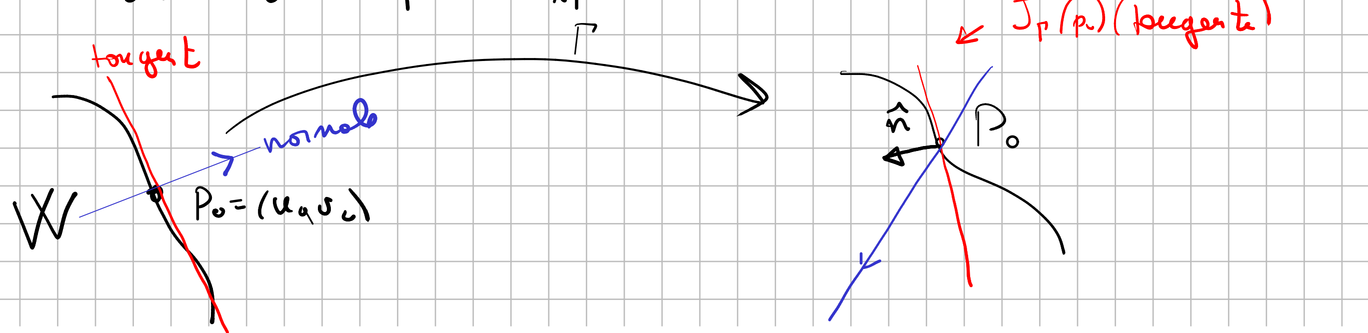
$$\gamma'(t) \quad J_\Gamma(r(t))\, r'(t)$$

$\Rightarrow$ $\gamma'(0) = J_\Gamma(p_0)\hat{\nu}(p_0)$ $\leftarrow$ è un vettore in $T_S(P_0)$

(perché $T_S(P_0) = J_\Gamma(p_0)\mathbb{R}^2$) e $\gamma'(0) \notin T_{\Sigma(S)}$
perché $J_\Gamma(p_0)$ è iniettivo

<u>DUNQUE</u> $J_\Gamma(p_0)\hat{\nu}(p_0)$ è un vettore in $T_S(P_0)$ e NON in $T_{\Sigma(S)}(P)$
che è "uscente" da S ($\gamma(t)$ esce da S per $t > 0$)

NON È DETTO CHE $J_\Gamma(p_0)\hat{\nu}(p_0)$ sia perpendicolare a $T_{\Sigma(S)}(P_0)$
Però posso definire $\hat{n}(P_0)$ come l'unico vettore di norma 1, che sta nell'ortogonale di $T_{\Sigma(S)}(P_0)$, e che è concorde con $J_\Gamma(P_0)\hat{\nu}(p_0)$



DUNQUE $\hat{n}(P_0)$ genera l'ortogonale a $T_{\Sigma'(S)}(P_0)$ dentro $T_S(P_0)$. $\hat{n}(P_0)$ ha "UN VERSO CANONICO" USCENTE DA S

· IN OGNI $P_0 \in \Sigma'(S) \setminus \Sigma^*(S)$ introduciamo di vettori

$\hat{n}(P_0)$ e poi un vettore $\hat{t}(P_0)$ tangente a $\Sigma'(S)$

e un vettore $\hat{\nu}(P_0)$ NORMALE A S

CANONICO

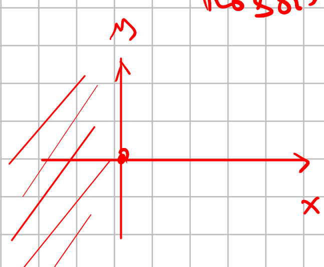
NON SONO CANONICI - IL LORO VERSO È "ARBITRARIO"

VEDREMO CHE LA SCELTA DEI VERSI DI $\hat{t}$ e $\hat{\nu}$ Determinano "L'ORIENTAMENTO" di S

ORIENTARE S $\longleftrightarrow$ Fare una scelta dei versi di $\hat{\nu}$ e $\hat{t}$

LI SCEGLIEREMO IN MODO CHE LA TERNA

$\left((\hat{\nu}, \hat{n}, \hat{t}) - \right)$ $(\hat{n}, \hat{t}, \hat{\nu})$ sia "destrorsa" cioè sia ottenibile da $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ mediante una trasformazione lineare con determinante > 0



se camminiamo su $\Sigma'(S)$, con la testa rivolta verso $\hat{\nu}$ $\Rightarrow$ S sta a sinistra ($\hat{n}$ è a destra)