Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 14/04/2025

SUPERFICI (cont.)

La volta scorsa abbiamo definito

- le parametrizzazioni : $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ W dominio reg. limitato in $\mathbb{R}^2$, Γ $C^1(\mathring{W})$ e $C^0(W)$, Γ iniettiva e
$$\vec{N}_\Gamma(u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \mathring{W}$$

Per una tale Γ pongo

sostegno di Γ, $S_\Gamma := \Gamma(W) = \{P \in \mathbb{R}^3 : \exists (u,v) \in W : \Gamma(u,v) = P\}$

bordo di Γ, $\Sigma_\Gamma := \Gamma(\partial W) = \{P \in \mathbb{R}^3 : \exists (u,v) \in \partial W : \Gamma(u,u) = P\}$

Se Γ è una parametrizzazione e se $P \in S_\Gamma$ allora l'unica coppia $(u,v) \in W$ per cui $P = \Gamma(u,v)$ sono le "coordinate di P" relative a Γ

- Cambi di parametro : dati W e W_1 domini reg. e lotti in $\mathbb{R}^2$, chiamo cambio di par. una $\phi : W_1 \to W$ continua bigettiva, $C^1(\mathring{W}_1)$, J_ϕ invertibile in $\mathring{W}$

($\Rightarrow$ ϕ^{-1} ha le stesse proprietà, ci vorrebbero delle dim. - teor. di inv. loc.)

- Data $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione e ϕ un cambio di parametro $\phi : W_1 \to W$, allora $\Gamma_1 := \Gamma \circ \phi$ (da $W_1 \to \mathbb{R}^3$) è una "riparametrizzazione di Γ" mediante ϕ.

TEOREMA ora un Lemma... Se $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ sono due parametrizzazioni t.c. $S_\Gamma = S_{\Gamma_1}$, allora esiste un cambio di parametro $\Phi : W_1 \to W$ t.c. $\Gamma_1 = \Gamma \circ \Phi$. (NO DIM.)

PROP. Se A è una matrice 3×2 e chiamo A^1 e A^2 le sue colonne, che sono vettori di $\mathbb{R}^3$, posso definire

$A = [A^1 | A^2]$

$$\boxed{\nu(A) := A^1 \otimes A^2 \in \mathbb{R}.}$$

Se B è una 2×2 invertibile si ha:

$$\nu(A\,B) = \det B \; \nu(A)$$

$$\left(\underset{3\times 2}{A} \quad \underset{2\times 2}{B} \to \underset{3\times 2}{AB} \right)$$

Dim. Supponiamo che $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Allora

$$A\,B = \left[A_1 \,|\, A_2 \right] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left[aA_1 + cA_2 \,|\, bA_1 + dA_2 \right]$$

def. di prodotto tra matrici

Allora $\nu(AB) = (aA_1 + cA_2) \otimes (bA_1 + dA_2) =$

$$ab \underbrace{A_1 \otimes A_1}_{=0} + ad\, A_1 \otimes A_2 + cb \underbrace{A_2 \otimes A_1}_{-A_1 \otimes A_2} + cd \underbrace{A_2 \otimes A_2}_{=0} =$$

$$(ad - bc)\, A_1 \otimes A_2 = \det B \cdot \nu(A)$$

#

CONSEGUENZA Se $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione, se $\Phi : W_1 \to W$ è un cambio di parametro e se chiamo $\Gamma_1 := \Gamma \circ \Phi$ si ha

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1, v_1) = \det J_\Phi(u_1, v_1)\; \vec{N}_\Gamma(\Phi(u_1, v_1))$$

Questo segue dal fatto che (con la notazione sopra)

$$\vec{N}_\Gamma = \nu(J_\Gamma) \qquad \left(J_\Gamma = \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \,\middle|\, \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right] \right) \implies$$

$$\vec{N}_{\Gamma_1} = \nu(J_{\Gamma_1}) = \nu((J_\Gamma \circ \phi) J_\phi) = \det(J_\phi)\, \nu(J_\Gamma \circ \phi) = \lrcorner$$

#

Ricordo anche che abbiamo definito

DEF $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrica se $\exists\ \Gamma : W \to \mathbb{R}$ parametrizzazione tale che $S = \Gamma(W) = S_\Gamma$

* || Abbiamo anche detto che, se ϕ è un cambio di parametro tra W_1 e W, $\Rightarrow$ ϕ manda $\mathring{W}_1$ in $\mathring{W}$ e ∂W_1 in ∂W

Def. Chiamo bordo di S l'insieme $\Sigma(S) = \Gamma(\partial W) = \Sigma_\Gamma$

A causa della proprietà sopra $\star$, se Γ_1 è un'altra parametrizzazione $\Rightarrow \exists\ \phi$ c. par. t.c. $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$. Dunque

$$P \in \Gamma(\partial W) \iff P \in \Gamma_1(\partial W_1)$$

$\Updownarrow$

infatti $\exists (u,v) \in \partial W) : P = \Gamma(u,v)$

Se prendo $(u_1, v_1) \in W : (u,v) = \phi(u_1, v_1)$ deve essere per forza $(u_1, v_1) \in \partial W_1$ (per la $\star$). Dunque $P = \Gamma_1(u_1, v_1) \iff P \in \Gamma_1(\partial W_1)$

QUESTO MOSTRA CHE LA DEF. DI $\Sigma(S)$ non dipende dalla parametrizzazione (che io scelgo per "descrivere" S).

DEF (TANGENTI E NORMALI).

Se S è una sup. par., per ogni punto $P \in S \setminus \Sigma(S)$ pongo

- $T_P(S) := \operatorname{span}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)\right) = J_\Gamma(\mathbb{R}^2) \leftarrow$

$$= \left\{ \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v),\ \lambda \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

dove $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione per S ($\Gamma(W) = S$) e $(u,v) \in \mathring{W}$ sono le coordinate di P ($P = \Gamma(u,v)$)

T_P è un sottospazio di dim 2 in $\mathbb{R}$.

NB. $\vec{v} = \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial u} + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \iff \vec{v} = J_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

- Chiamo "retta normale" la retta ortogonale a $T_p(S)$

cioè $N_p(S) := \{ \lambda \vec{N}_p(u,v) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

A priori queste def. dipendono da Γ - PERÒ se Γ_1 è un'altra par. e (u_1, v_1) sono le coordinate di P rispetto a $\Gamma_1 \Rightarrow$

$\exists \ \phi$ cambio di par. per cui $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$, so che $(u_1, v_1) = \phi(u,v)$

e so che $\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1, v_1) = \overset{\neq 0}{\det} J_\phi(u_1, v_1) \ \vec{N}_\Gamma(u,v)$

DUNQUE $\{ \lambda \vec{N}_\Gamma(u,v) \ \ \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \lambda \vec{N}_{\Gamma_1}(u, v_1) \ \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

PER CUI $N_p(S)$ NON DIPENDE dalla parametrizzazione

- DATO CHE $T_p(S) = N_p(S)^\perp$ anche il piano tangente

NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

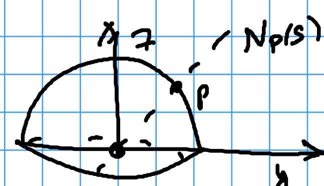
PER ESEMPIO $\quad S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0 \}$.

$P = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in S \qquad P \notin \partial S = \{ (x,y,0) : x^2 + y^2 = 1 \}$

Posso prendere come parametrizzazione $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$\Rightarrow \vec{N}_\Gamma(u,v) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \vec{i} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \vec{j} + \vec{k}$ (vedi la volta scorsa)

Se voglio la normale in P devo considerare le coordinate di P che sono $u = 0 \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$



$\vec{N}_\Gamma(0, \sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{1-1/2}} \vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k}$

$N_p(S) = \{ \lambda \vec{N}_\Gamma(0, \sqrt{2}/2), \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \lambda (\vec{j} + \vec{k}), \lambda \in \mathbb{R} \}$

da cui $T_p(S) = \{ \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} - \mu \vec{k} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

ALTRO ESEMPIO

$S := \{(x,y,z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1 \quad , \quad z = x^2 - y^2\}$

che è il grafico della funzione $g(x,y) := x^2 - y^2 \qquad (x,y) \in Q = [-1,1] \times [-1,1]$

POSSO FARE UN DISCORSO GENERALE SUI GRAFICI :

Se $g : W \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 ($C^0(W)$ e $C^1(\overset{\circ}{W})$)

posso considerare il grafico di g: $S := \{(x,y,z) : (x,y) \in W \text{ e } z = g(x,y)\}$

Posso parametrizzare S mediante $\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v))$

- Γ è $C^0(W)$ ed è $C^1(\overset{\circ}{W})$
- Γ è iniettiva $(u_1, v_1) \neq (u, v) \Rightarrow \Gamma(u_1, v_1) \neq \Gamma(u,v)$
- $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \vec{i} + \frac{\partial}{\partial u} g \vec{k} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial v} g \, \vec{k} \qquad \Longrightarrow$

$$\vec{N}_\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial v} \vec{j} + \vec{k} \qquad \neq 0 \quad .$$

QUINDI S è una sup parametrica.

TORNANDO ALL'ESEMPIO, abbiamo, se considero

$\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ ho

$\vec{N}_\Gamma(u,v) = -2u \, \vec{i} + 2v \, \vec{j} + \vec{k} \qquad (\neq 0)$

Se per esempio $P = \left(\frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \; 0\right) \in S$

(Se taglio S con il Piano $z=0$ trovo $x = y \quad x = -y$)

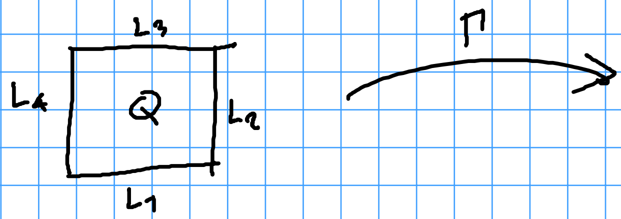
In P la retta normale è data da

$$N_P(S) = \{\lambda(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e $T_P(S) = N_P(S)^\perp = \{\lambda(\vec{i} + \vec{k}) + \mu(\vec{j} - \vec{k})\}$

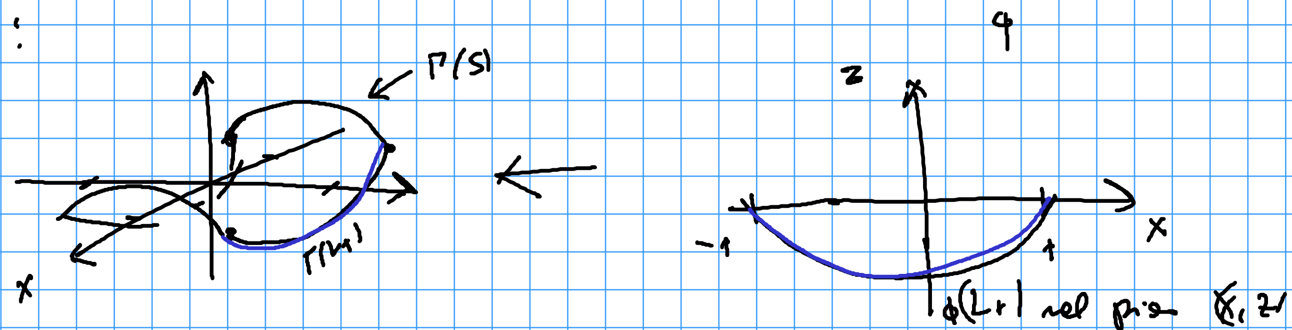
IN QUESTO CASO $\Sigma'(S)$ è fatto di quattro pezzi: $\Gamma(L_1)\cup\Gamma(L_2)\cup\Gamma(L_3)\cup\Gamma(L_4)$

$\partial Q = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$



$L_1 = \{(x,-1)\ \ -1 \le x \le 1\}$ $\qquad$ $\phi(L_1) = \{(x,-1,\ x^2-1),\ -1 \le x \le 1\}$

:



ANALISI DI $\Sigma'(S)$

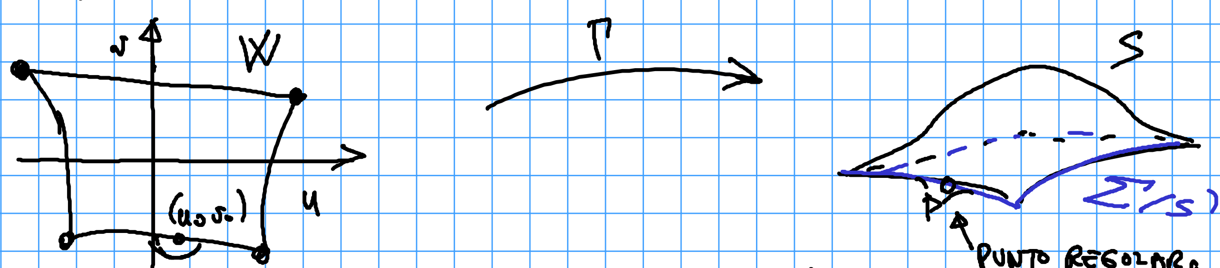
<u>Def.</u> Se $P_0 \in \Sigma'(S)$ dico che P_0 è <u>regolare</u> se

$\exists\ \Gamma : W \to \mathbb{R}$ parametrizzazione per S tale che.

dette $(u_0,v_0) \in \partial W$ le coordinate di P_0 ($\Gamma(u_0,v_0) = P_0$)

(1) posso estendere Γ a un intorno di (u_0,v_0), mantenendo tutte le proprietà delle parametrizzazioni

(2) il punto (u_0,v_0) sta nella frontiera regolare di W.



<u>Ricordo</u> che W è "regolare a tratti" $\Rightarrow$ "W può avere spigoli"

SI PUÒ VEDERE CHE, dato che siamo in $\mathbb{R}^2$ e W è limitato, gli spigoli sono un <u>numero finito</u>. I punti di ∂W

eccetto questi spigoli sono punti della frontiera regolare
↑
punti in cui si annullano due G_i

Nei pti di frontiera reg. è ben definito la normale a ∂W

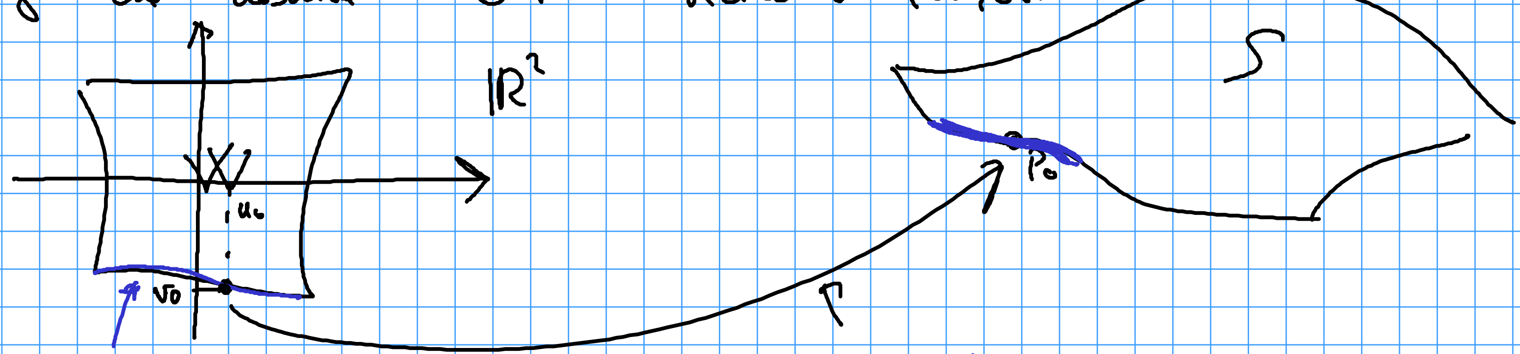
P_0 regolare $\iff$ - le coordinate di P_0 non sono uno spigolo per ∂W
- la Γ si può estendere in un intorno di (u_0, v_0)

Def. Se P_0 è un punto regolare di $\Sigma(S)$:

(1) ha senso considerare $T_{P_0}(S)$ e $N_{P_0}(S)$
(come fatto prima, usando la Γ che si estende in un intorno)

(2) Si può scrivere $T_p(S)$ come lo spazio generato da
- la retta tangente a $\Sigma(S)$
- la retta normale a $\Sigma(S)$ (e a S)

Per definire queste due rette considero la Γ che si estende a un intorno di (u_0, v_0) ($\Gamma(u_0, v_0) = P_0$) e considero una curva γ che descrive ∂W vicino a (u_0, v_0)



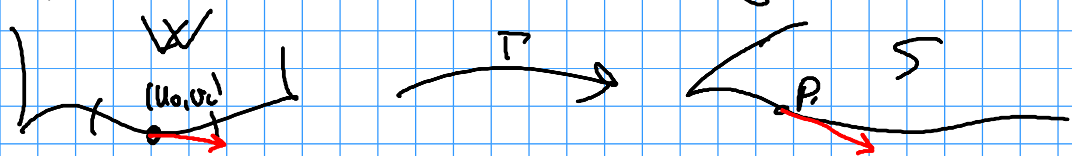
questo pezzo è un grafico $v = f(u)$ ← uso $\gamma(t) = (t, f(t))$ t vicino a u_0

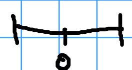
Questa curva la posso trovare usando il Dini (vicino a (u_0, v_0)
W coincide con $\{(u,v) : G(u,v) \le 0\}$ e $\partial W = \{(u,v) : G(u,v) = 0\}$)
per una opportuna G.

[IN GENERALE, se $W \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio reg. a tratti, limitato $\Rightarrow$
∂W è descritto da un numero finito di curve chiuse e regolari]

[e dotti (i cui "spigoli" coincidono con i punti non nella frontiera regolare di W)]

Data dunque questa curva $\gamma(t)$ che descrive la frontiera di W vicino a (u_0,v_0) e che passa per (u_0,v_0) per esempio per $t=0$ posso considerare la curva $\tilde{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t))$





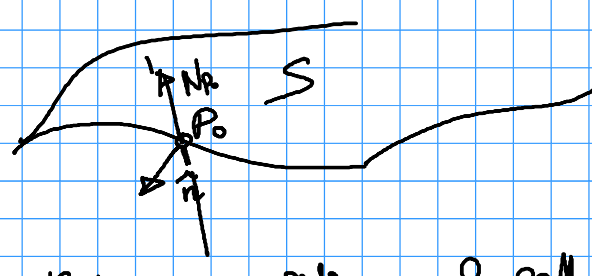
Questa $\tilde{\gamma}$ viaggia in $\Sigma(S)$ e $\tilde{\gamma}(0) = P_0$

Se faccio $\tilde{\gamma}'(0) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Gamma(\gamma(t))\Big|_{t=0} =$

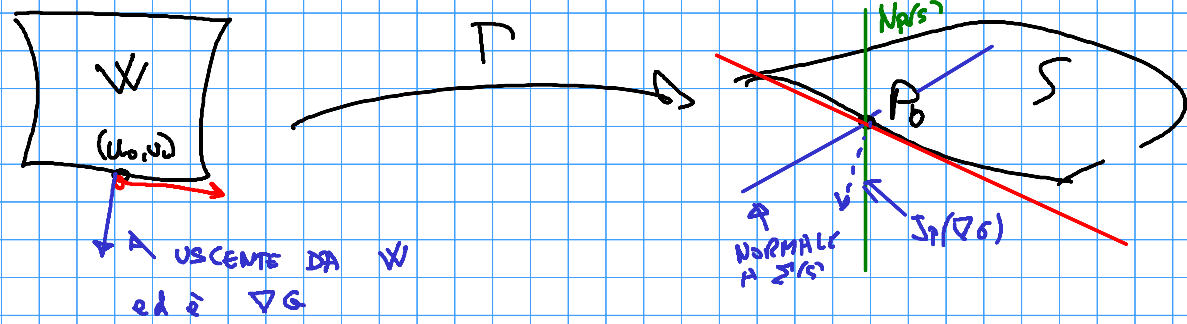
$J_\Gamma(\gamma(0))\,\gamma'(0) = J_\Gamma(P_0)\underbrace{\dot{\gamma}(0)}_{\text{vettore tangente a } \partial W} \leftarrow$ vettore in $T_{P_0}(S)$ è nell'immagine di J_Γ

- Chiamo $\boxed{\text{retta tangente a } \Sigma(S)}$ ← NEI PUNTI REGOLARI in P_0 la retta generata da $\tilde{\gamma}'(0)$ **NOTA** Per come è definita $\tilde{\gamma}'(0)$ è una direzione tangente a $\Sigma(S)$ in P_0)

- INFINE POSSO DEFINIRE UN VERSORE NORMALE USCENTE $\hat{n}$ A S in $T_{P_0}(S)$ ed è ortogonale alla retta di cui sopra.



È chiaro che in $T_{P_0}(S)$ posso considerare la retta ortogonale alla retta tangente a $\Sigma(S)$. POSSO PERÒ ANCHE CONSIDERARE IL VERSO USCENTE DA S (RIMANGO SU UN'IDEA INTUITIVA)



Il vettore ∇G è normale uscente da W. Se ci applico J_P

$J_{P_0}(\nabla G)$ ho un vettore in $T_{P_0}(S)$ che non è tangente a $\Sigma'(S)$

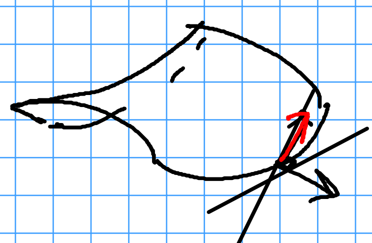
Scelgo sulla retta ortogonale a $\Sigma'(S)$ il verso concorde con $J_P(\nabla G)$

Dunque $\hat{n}(P_0)$ è il versore ortogonale alla retta tangente a $\Sigma'(S)$ CONCORDE con $J_P(\nabla G)$ (G è il vincolo che mi dà W vicino (u_0,v_0))

CON QUESTA COSTRUZIONE ABBIAMO INDIVIDUATO per ogni $P_0 \in \Sigma'(S)$, (TRE RETTE)

- La retta normale a S
- Il piano tangente a S e dentro questo piano
  - la retta tangente a $\Sigma'(S)$
  - la retta normale a $\Sigma'(S)$ (ma tangente a S!!)

Inoltre nella terza retta è ben definito un verso — quello uscente da S



FINORA NON HA SENSO CON SI DEFINIRE UN VERSO NELLA RETTA NORMALE A S E NELLA RETTA TANGENTE A $\Sigma(S)$

VEDREMO PERÒ CHE - SE ASSEGNO UN VERSO ALLA RETTA NORMALE, automaticamente sarà definito un verso sulla tangente a $\Sigma(S)$)