Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

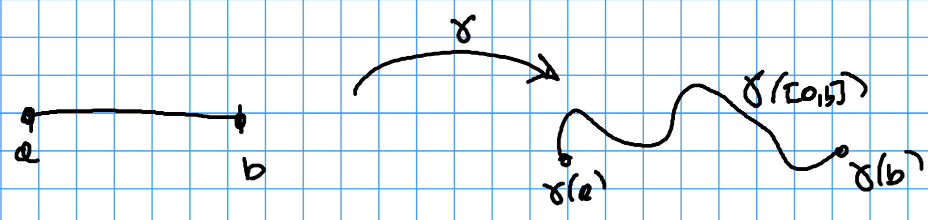
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 56 31/04/2025

SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

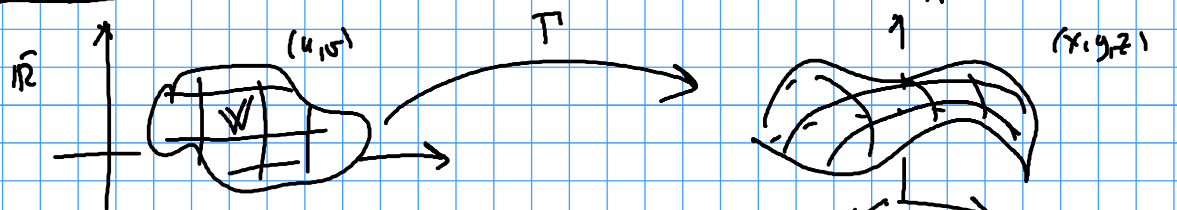
La def. è "analoga" a quella fatta per le curve - anche se ci sono maggiori complicazioni.

Ricordo che una curva (in $\mathbb{R}^3$) è una mappa da $[a,b] \to \mathbb{R}^3$



Cosa si fa se voglio una superficie in luogo di una curva?

IDEA Prendo $W \subset \mathbb{R}^2$ e una mappa $T: W \to \mathbb{R}^3$



Naturalmente bisogna aggiungere delle ipotesi. Per esempio se $T(u,v) = (x_0, y_0, z_0)$ una costante trovo che l'immagine $T(W)$ è un punto, che non sembra quello che chiamiamo superficie. Anche su W va detto qualcosa (W non può essere un segmento in $\mathbb{R}^2$ ...)

- INOLTRE VORREI vedere

le superfici come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ e non come mappe

(anche con le curve avevamo fatto vedere una possibile def. di questo tipo)

BISOGNA ANDARE PER (MOLTI) GRADI

__Def.__ (PARAMETRIZZAZIONE) Chiameremo "parametrizzazione" una mappa $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ tali che

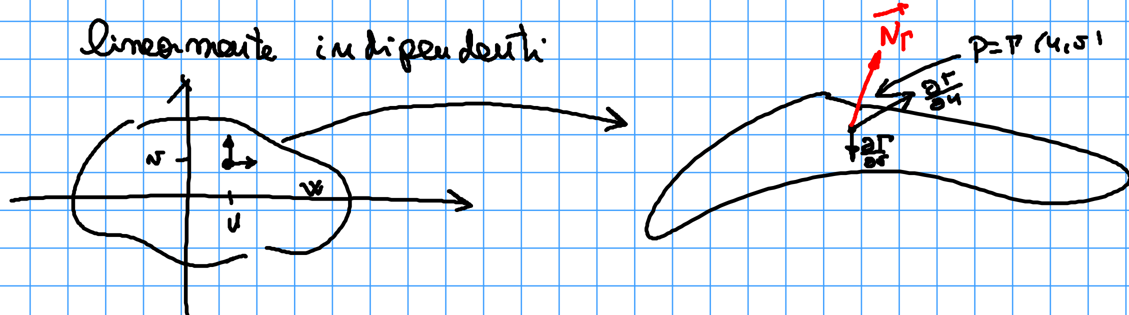
(a) $W \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare e dotti limitato e Γ è continuo, di classe C^1 su $\mathring{W}$ (oppure:)

(a*) $W \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio reg. e dott. limitato e Γ è di classe C^1 su un aperto Ω che contiene W (Γ è C^1 su tutto W)

((a*) $\Rightarrow$ (a))

(b) Γ è iniettivo (dunque W è in corrispondenza biunivoca con $S := \Gamma(W)$ – i punti (u,v) di W si possono pensare come delle "coordinate" per i punti di S. cioè $\forall P \in S$ esiste unico $(u,v) \in W$ t.c. $P = \Gamma(u,v)$)

(c) Per ogni $(u,v) \in \mathring{W}$ ($\forall (u,v) \in \overline{W}$ nel caso (a*)) le due derivate $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)$ sono linearmente indipendenti



(per esempio Γ non può essere costante e neppure può mandare tutto W in una retta

QUESTA IPOTESI (c) si può esprimere in modo equivalente chiedendo che

$$\vec{N}_\Gamma(u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0} \qquad \forall (u,v) \in \mathring{W} \ \left(\in W \text{ caso } (a^*)\right)$$

Nel caso che valga a^* diremo che Γ è una parametrizzazione regolare fino al bordo - in tal caso $\vec{N}_\Gamma$ è definito su tutto W e non solo su $\mathring{W}$.

<u>OSS.</u> Il fatto che Γ sia iniettiva esclude (per ora) che $\Gamma(W)$ sia per esempio la sfera.

<u>Def.</u> (SUPERFICIE PARAMETRICA) Dico che un sottoinsieme S in $\mathbb{R}$ è una "superficie parametrica" se esiste una parametrizzazione $\Gamma : W \to \mathbb{R}^3$ (con le proprietà) t.c. $\Gamma(W) = S$ (S è il "sostegno" di Γ). Naturalmente se c'è una tale Γ, questa non è unica. Però per certi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ una tale Γ NON ESISTE - per esempio se S = segmento la proprietà (c) non può mai essere vera.

<u>Def.</u> Data una sup. par. S posso definire un po' di cose:

(a) IL BORDO di S, che è

$$\Sigma(S) := \Gamma(\partial W) \quad \text{dove } \Gamma \text{ è una parametrizzazione di } S$$

Questa def sarà ben posta se dimostro che, se $\Gamma_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ è un'altra parametrizzazione per S ($\Gamma_1(W_1) = S$) $\Longrightarrow$

$$\Gamma_1(\partial W_1) = \Gamma(\partial W)$$

cioè il bordo di S <u>non</u> dipende dalla parametrizzazione.

<u>ESEMPIO</u> Prendiamo $W = \{u^2+v^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e definiamo $\Gamma(u,v) := (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$. Vediamo che Γ è una parametrizzazione.

(a) W è regolare : $G(u,v) = u^2+v^2-1$ e vedo che $\nabla G \neq 0$ se $G=0$

Inoltre Γ è C^1 su $\{u^2+v^2<1\}$ ed è chiaramente continua (NON è $C^1(W)$ a causa della radice.) HO (a) NON (a^*)

(b) Γ è iniettivo:

$$\Gamma(u_1,v_1)=\Gamma(u_2,v_2) \Leftrightarrow \left(u_1,v_1,\sqrt{1-u_1^2-v_1^2}\right)=\left(u_2,v_2,\sqrt{1-u_2^2-v_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_1=u_2, \; v_1=v_2$$

(c) Calcoliamo $\displaystyle \frac{\partial\Gamma}{\partial u}(u,v)=\left(1,0,\frac{-\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$ (come vettore)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial v}(u,v)=\left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_\Gamma(u,v)=\left(\vec{i}-\frac{u}{\sqrt{\ }}\vec{k}\right)\otimes\left(\vec{j}-\frac{v}{\sqrt{\ }}\vec{k}\right)=$$

$$\vec{i}\times\vec{j}-\frac{u}{\sqrt{\ }}\vec{k}\otimes\vec{j}-\frac{v}{\sqrt{\ }}\vec{i}\otimes\vec{k}+\underbrace{\frac{u}{\sqrt{\ }}\frac{v}{\sqrt{\ }}\vec{k}\otimes\vec{k}}_{0}=$$

$$\vec{k}+\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{i}+\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\begin{pmatrix}u\\ v\\ \sqrt{1-u^2-v^2}\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{N}_\Gamma\|^2=\frac{1}{1-u^2-v^2}\left(u^2+v^2+1-u^2-v^2\right)=\frac{1}{1-u^2-v^2}$$

$$\|N_\Gamma\|=\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\neq 0 \quad \text{se} \quad (u,v)\in \mathring{W}$$

Chi è il sostegno di Γ ??

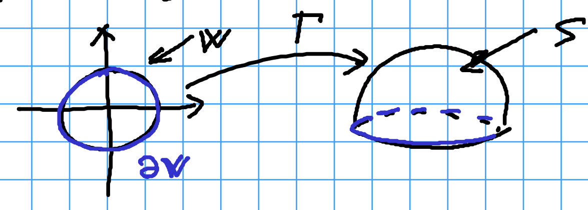
$$S=\left\{ \underset{x}{u},\ \underset{y}{v},\ \underset{z}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \ : \ u^2+v^2\leq 1\right\}$$

$$(x,y,z)\in S \Rightarrow x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+1-u^2-v^2=1, \quad z\geq 0$$

Viceversa se $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0 \Rightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

IN ALTRI TERMINI $\Gamma(W)=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1, \; z\geq 0\}$

$S=\Gamma(W)$ è "l'emisfero nord".

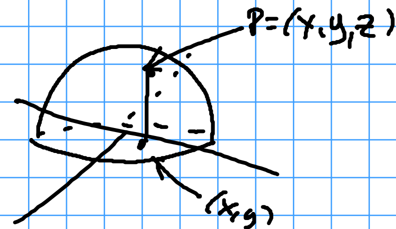


Quindi (a leggere la def.) ho dimostrato che $S=\{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ è una superficie parametrica. Inoltre (se la def. di bordo sta in piedi) ho che

$$\Sigma(S) = \Gamma(\partial W) = \Gamma(\{u^2+v^2=1\}) = \{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ z=0\}$$

Cerchiamo un'altra parametrizzazione per S

Sono tentato di usare le "coordinate sferiche"



$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = \rho\cos(\varphi)$$

QUI $\rho=1$ è fissato

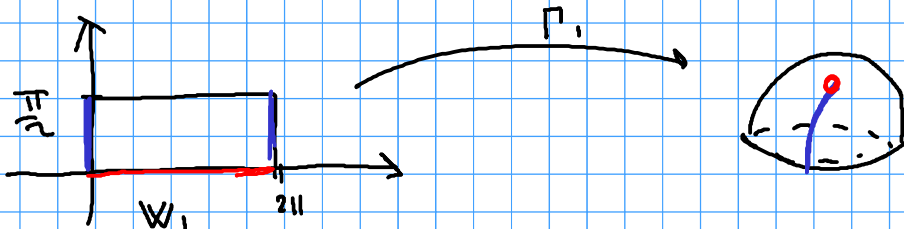
CIOÈ CONSIDERO

$$\Gamma_1(\theta,\varphi) := (\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \sin(\theta)\sin\varphi,\ \cos(\varphi))$$

da $\underbrace{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]}_{W_1} \to \mathbb{R}^3$ (se $z\geq 0$ $\quad 0\leq\varphi\leq\pi/2$)

PURTROPPO Γ_1 NON È INIETTIVA. $\Gamma_1(\theta,0)=(0,0,1)\ \forall\theta$

$\Gamma_1(0,\varphi)=\Gamma(2\pi,\varphi)\quad\forall\varphi$



INOLTRE

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\theta} = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\varphi} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(\theta,\varphi) = -\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\,\underbrace{\vec{i}\otimes\vec{i}}_{0}$$
$$-\sin\theta\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\,\underbrace{\vec{i}\otimes\vec{j}}_{\vec{k}} + \sin\theta\sin\varphi\sin\varphi\,\underbrace{\vec{i}\otimes\vec{k}}_{-\vec{j}} +$$
$$\cos\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\,\underbrace{\vec{j}\otimes\vec{i}}_{-\vec{k}} + \cdots\,\underbrace{\vec{j}\otimes\vec{j}}_{0} - \cos\theta\sin\varphi\sin\varphi\,\underbrace{\vec{j}\otimes\vec{k}}_{\vec{i}} =$$

$$-\cos\theta\sin^2\varphi\,\vec{i} - \sin\theta\sin^2\varphi\,\vec{j} - (\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})\cos\varphi\sin\varphi\,\vec{k}$$

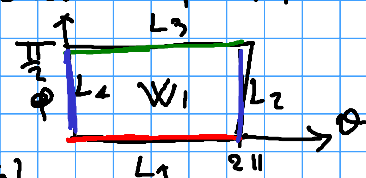
$$-\sin\varphi\left(\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}\right) = -\sin\varphi\,\vec{\Gamma}(\theta,\varphi)$$

Si vede che $\vec{N}_p(\theta,\varphi)=0$ se $\varphi=0$

Le coordinate sferiche hanno qualche difetto → NON SONO UNA BUONA PARAMETRIZZAZIONE.

Per curiosità vediamo cosa viene facendo $\Gamma_1(W_1)$

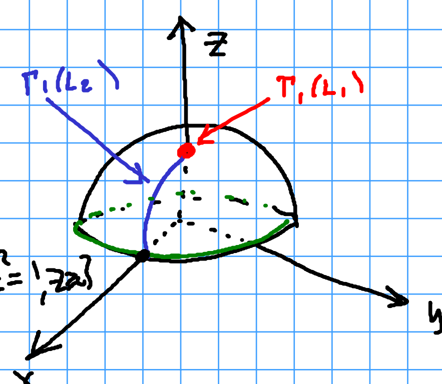
$\partial W_1 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$



$L_1 = \{(\theta,0)\ \ 0\le\theta\le 2\pi\}$ $\quad L_2=\{(2\pi,\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi/2\}$

$L_3 = \{(\theta,\pi/2)\ \ 0\le\theta\le 2\pi\}$ $\quad L_4=\{(0,\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi/2\}$

$\Gamma_1(\partial W_1) = \Gamma_1(L_1)\cup\Gamma_1(L_2)\cup\Gamma_1(L_3)\cup\Gamma_1(L_4)$



$\Gamma_1(L_1) = \{\Gamma_1(\theta,0) : 0\le\theta\le 2\pi\} = \{(0,0,1)\}$

$\Gamma_1(L_2) = \{\Gamma_1(2\pi,\varphi) : 0\le\varphi\le\pi/2\} = \{(x,0,z) : x^2+z^2=1, z\ge 0\}$

$\Gamma_1(L_3) = \{\Gamma_1(\theta,\pi/2) : 0\le\theta\le 2\pi\} = \{(x,y,0).\ x^2+y^2=1\}$

$\Gamma_1(L_4) = \Gamma_1(L_2)$ ..

Se usassi queste Γ_1 troverei $\Sigma(S) = \{x^2+y^2=1, z=0\}\cup\{x^2+z^2=1, y=0, z\ge 0\}$

che non mi piace!! IL PROBLEMA È CHE Γ_1 NON RISPETTA LA DEF. DI PARAMETRIZZAZIONE.

PER VEDERE CHE LA DEF. DI BORDO È BEN POSTA INTRODUCO UN LEMMA (che non dimostro)

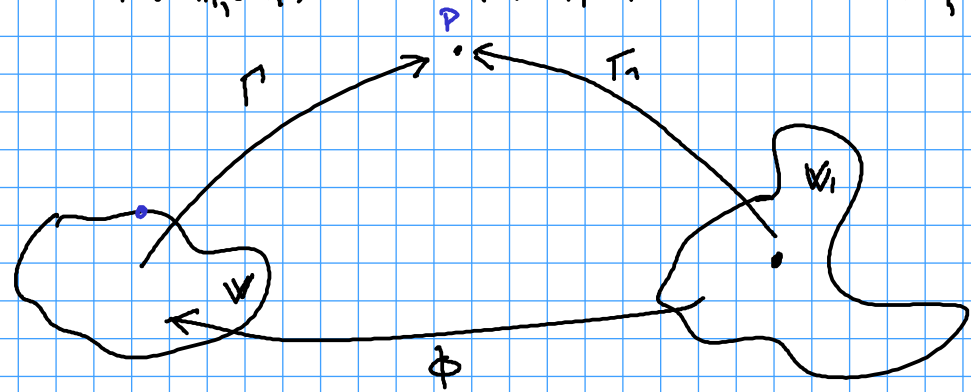
LEMMA Supponiamo che $\Gamma : W\to\mathbb{R}^3$ e $\Gamma_1 : W\to\mathbb{R}^3$ siano due parametrizzazioni con lo stesso sostegno: $\Gamma(W)=\Gamma_1(W_1)$. Allora esiste $\Phi : W^1\to W$ con le seguenti proprietà:

(a) Φ è bigettiva

(b) Φ è continua su W^1 $\quad \Phi^{-1}$ è continua

(c) Φ è $C^1(\mathring{W}_1)$ $\quad \Phi^{-1}$ è $C^1(\mathring{W})$

(d) $\Gamma_1(u_1,v_1) = \Gamma(\Phi(u_1,v_1)) \qquad \forall (u_1,v_1)\in W_1$



Oss. È chiaro che $\Phi = \Gamma^{-1}\circ\Gamma_1$ che è bigettiva (Γ e Γ' iniettive)
— poi però bisogna dimostrare le altre proprietà

Def. Una Φ con le proprietà sopra si chiama "cambio di parametri"

Dunque il Lemma afferma che:

Se Γ e Γ_1 sono parametrizzazioni con lo stesso sostegno $\Rightarrow$ esiste un cambio di parametro che fa passare dall'una all'altra

Oss. Se Γ e Γ_1 sono reg. fino al bordo (vale 8*) allora Φ è $C^1(W')$ (anzi è C^1 su un aperto Ω_1 che contiene W.)

FATTO (che non dimostro) Se $\Phi: W_1 \to W$ è un cambio di parametro $\Rightarrow$ Φ manda $\mathring{W}_1$ in $\mathring{W}$ e ∂W_1 in ∂W (basta la continuità e la bigettività di Φ — e il fatto che la dim. in partenza coincide con quella in arrivo)

DUNQUE LA DEF. DI BORDO È SENSATA: Infatti:

Se ci sono due parametrizzazioni Γ_1 e Γ t.c. $\Gamma_1(W_1)=\Gamma(W)=S$ (per S) $\Rightarrow$ $\exists$ Φ cambio di paramet. : $\Gamma_1 = \Gamma\circ\Phi$.

Se $P = \Gamma(u_0,v_0)$ con $(u_0,v_0)\in\partial W$ $\Rightarrow$

$P = \Gamma_1(\bar u_0,\bar v_0)$ dove $(\bar u_0,\bar v_0) = \Phi^{-1}(u_0,v_0)$

Ma ho detto che $(\bar u_0,\bar v_0)\in\partial W_1$ e dunque

$P = \Gamma_1(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ con $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in \partial W_1$

INVERTENDO I RUOLI DI W_1 e W otteniamo che

$$P = \Gamma(u, v) \quad \text{con} \quad (u, v) \in \partial W$$
$$\Updownarrow$$
$$P = \Gamma_1(u_1, v_1) \quad \text{con} \quad (u_1, v_1) \in \partial W_1$$

e dunque $\Gamma(\partial W) = \Gamma_1(\partial W_1) \leftarrow \Sigma(S)$ è ben definito

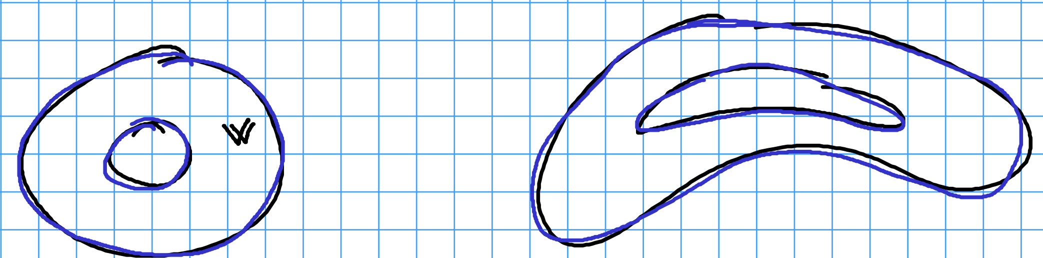
Per quanto visto prima: Se $S = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$
$$\Sigma(S) = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1, z=0\}$$

ATTENZIONE La NOZIONE DI "BORDO" di una superficie S
È DIVERSA dalla NOZIONE DI "FRONTIERA"

Nell'esempio sopra $S = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ ha se stesso come frontiera: $\partial S = S$ (S "è sottile" in $\mathbb{R}^3$)

Per definire il bordo DEVO usare le parametrizzazioni

OSS. "Moralmente" $\Sigma(S)$ è una curva o unione di curve perché ∂W si può descrivere come unione di curve



CI TORNIAMO