Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 09/04/2025

$$\vec{f} = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$$

$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È SEMP. CONN.

VISTO CHE (a) $\vec{f}$ è irrotazionale

(b) Se γ è una circonferenza attorno all'origine

$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$

Ne segue (criterio particolare su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) che $\vec{f}$ è conservativo

Voglio trovare F potenziale per $\vec{f}$. $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

I° MODO Fisso un punto P_0 — $P_0 = (1,0)$ e per ogni $P \in \Omega$ costruisco una curva γ tra P_0 e P nel seguente modo

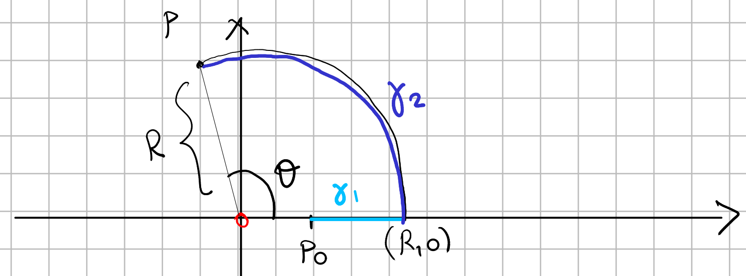
$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ dove γ_1 è il segmento tra P_0 e $(\|P\|, 0)$

γ_2 è l'arco di circonferenza che congiunge $(\|P\|, 0)$ e P. Se rappresento P in coordinate polari

$P = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ allora

$\gamma_1(t) := (1 + t(R-1), 0)$ $0 \le t \le 1$

$\gamma_2(t) := (R\cos(t), R\sin(t))$ $0 \le t \le \theta$



$$\gamma_1' = (R, 0)$$
$$\gamma_2' = (-R\sin(\theta), R\cos(t))$$

In questo modo posso definire $F(P) := \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$

$$= \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot ds = \int_0^1 f(1 + t(R-1), 0) \cdot (R\vec{i} + 0\vec{j})\, dt =$$

$$R \int_0^1 f_1(1+t(R-1), 0)\, dt = R \int_0^1 \frac{(1+t(R-1))^2}{((1+t(R-1))^2 + 0^2)^2}\, dt =$$

$$R \int_0^1 \frac{dt}{(1+t(R-1))^2} \qquad s = 1 + t(R-1)$$
$$ds = R\, dt$$

$$= \int_1^R \frac{ds}{s^2} = \left[-\frac{1}{s}\right]_1^R = 1 - \frac{1}{R} = \left(1 - \frac{1}{\|P\|}\right)$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^\theta \vec{f}(R\cos(t), R\sin(t)) \cdot (-R\sin(t), R\cos(t))\, dt =$$

$$\int_0^\theta \frac{R^2}{R^4}\left[(\cos^2(t) - \sin^2(t))\vec{i} + 2\cos(t)\sin(t)\vec{j}\right] \cdot \left[-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right] R\, dt$$

$$(-\cos^2 + \sin^2 + 2\cos^2)\sin$$

$$\frac{1}{R}\int_0^\theta \left(-(\cos^2(t) - \sin^2(t))\sin(t) + 2\cos^2(t)\sin(t)\right) dt =$$

$$\frac{1}{R}\int_0^\theta (\cos^2(t) + \sin^2(t))\sin(t)\, dt = \frac{1}{R}\int_0^\theta \sin(t)\, dt = \frac{1}{R}\left[-\cos(t)\right]_0^\theta =$$

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{R} = \frac{1}{\|P\|} - \frac{R\cos(\theta)}{\|P\|^2} = \frac{1}{\|P\|} - \frac{x}{\|P\|^2}$$

$$(P = (x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta))$$

$$\Rightarrow F(P) = 1 - \cancel{\frac{1}{R}} + \cancel{\frac{1}{R}} - \frac{\cos(\theta)}{R}$$

$$F(x,y) = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$$

Vediamo se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^2+y^2 - x2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

TORNA

II° MODO Cerco di ricavare F dalle condizioni

(a) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (b) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Partiamo da (b). Se integro rispetto a y

$$F(x,y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \qquad t = x^2+y^2 \quad dt = 2y\,dy$$

DIPENDE DA X

$$= \int \frac{x}{t^2}\,dt = x\left(-\frac{1}{t} + \text{cost}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} + c(x)$$

Dobbiamo trovare $c(x)$. Uso la (a) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2} + c(x)\right) = \cancel{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} \iff$$

$$\parallel$$

$$-\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + c'(x) = \cancel{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} + c'(x)$$

DUNQUE $c'(x) = 0 \Rightarrow c$ è costante e dunque

$$F(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + \text{cost}$$

PROPRIETA' Vediamo che i "campi radiali" sono detti conservativi.

Def- Chiamo "campo radiale" rispetto a un punto P_0 un campo della forma:

FUNZIONE DELLA DISTANZA DI P da P_0

VERSORE DA P_0 A P

$$\vec{f}(P) = \varphi(\|P-P_0\|) \cdot \frac{\overrightarrow{P-P_0}}{\|P-P_0\|}$$

dove $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua

SUPPONIAMO $P_0 = 0$ dunque

$$\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|) \frac{\vec{P}}{\|P\|} \qquad \vec{P} = \overrightarrow{P-O}$$

Caso particolare $\vec{f}(P) = \psi(\|P\|^2)\vec{P}$ che si può ricondurre al precedente usando $\varphi(P) = \psi(\|P\|^2)\|P\|$

(IN REALTÀ φ potrebbe essere definita anche in 0 ma il caso più interessante è quello in cui $\vec{f}$ è "singolare" nell'origine.)

FATTO Se $\vec{f}$ è radiale $\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo

INFATTI POSSO CONSIDERARE ϕ una primitiva di φ -cioè una funzione per cui $\phi' = \varphi$ (T.F. calc. int. $\phi = \int \varphi(\rho)d\rho$) $\phi(r) = \int_1^r \varphi(\rho)d\rho$). Allora posso definire

$$F(P) := \phi(\|P\|)$$

e verifico che F è un potenziale per $\vec{f}$ $\left(= \varphi(\|P\|)\frac{P}{\|P\|}\right)$

Infatti $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial x_i} = \phi'(\|P\|)\frac{\partial}{\partial x_i}\|P\| = \varphi(\|P\|)\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + \dots x_N^2} =$

$$\varphi(\|P\|)\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}} = \varphi(\|P\|)\frac{x_i}{\|P\|} = \varphi(\|P\|)\frac{P_i}{\|P\|}$$

$P = (x_1 \dots x_N)$ $\quad x_i =$ componente i-esima di P

DUNQUE $\displaystyle\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i \iff \nabla F = \vec{f}$

IN PARTICOLARE $\vec{f}(P) := \|P\|^{\alpha-1}\vec{P}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \neq -1$

conservativo e il potenziale è $\quad \|P\|^{\alpha} \quad \frac{\vec{P}}{\|P\|}$

con $\varphi(r) = r^{\alpha} \Rightarrow \phi(r) = \dfrac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\quad \alpha \neq -1$

DUNQUE $F(P) = \dfrac{\|P\|^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ se $\alpha \neq -1$ / $F(P) = \ln(\|P\|)$ se $\alpha = -1$

Sono tutti campi conservativi

IN $\mathbb{R}^3$ il campo "gravitazionale" $\vec{f}(P) = \frac{c}{\|P\|^2} \frac{P}{\vec{P}}$

è conservativo e ha come potenziale:

$-\frac{c}{\|P\|}$

Se $N = 2$ l'equivalente è $\frac{c}{\|P\|} \frac{P}{\|P\|}$ che

ha come potenziale $\ln(\|P\|)$

QUESTO

È UN ALTRO ESEMPIO DI CAMPO CONSERVATIVO SU UN DOMINIO NON SEMPLICEMENTE CONNESSO

N.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È S.C.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ È S.C. (SI DIMOSTRA!)