Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 54 07/04/2025

$\vec{f}:\Omega\to\mathbb{R}^N \quad \Omega\subset\mathbb{R}^N$

CAMPI IRROTAZIONALI: $\vec f$ IRR. SE $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\Longleftrightarrow$ $J_{\vec f}$ è una matrice $N\times N$ simmetrica.

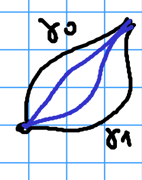
<u>VISTO</u> $\vec f$ conservativo $\Longrightarrow$ $\vec f$ IRROTAZIONALE

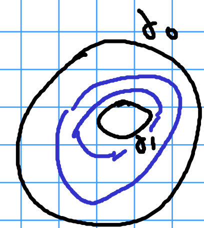
$\cancel{\Longleftarrow}$

quando è vero? dipende da Ω.

<u>Teorema</u> Se $\vec f$ è irrotazionale e se $\gamma_0,\gamma_1:[a,b]\to\Omega$ sono "omotope" allora $\displaystyle\int_{\gamma_0}\vec f\cdot d\vec s=\int_{\gamma_1}\vec f\cdot d\vec s$

(o ho curve con gli stessi estremi, o ho curve chiuse)



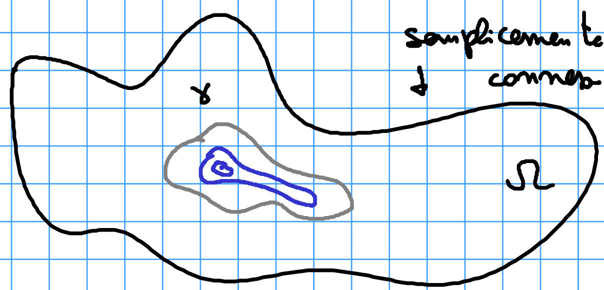


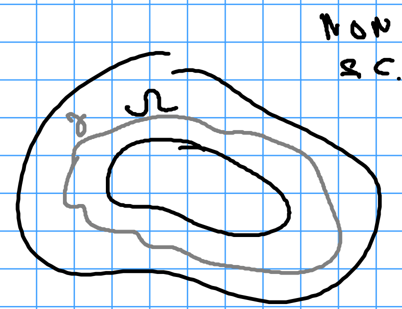
<u>Definizione</u> Dico che $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ è "semplicemente connesso", se è connesso e se ogni curva chiusa in Ω è omotopa a una costante. Questa ultima proprietà vuol dire che:

data $\gamma:[a,b]\to\Omega$ C^1 a tratti, $\gamma(a)=\gamma(b)$, allora esiste $H:[a,b]\times[0,1]\to\Omega$ H continua su $[a,b]\times[0,1]$ e tale che

- $H(t,0)=\gamma(t) \quad \forall t\in[a,b]$
- $H(a,s)=H(b,s) \quad \forall s\in[0,1]$

• $H(t, 1) = x_0 \quad \forall\, t \in [0, b]$ per un opportuno $x_0 \in \Omega$





Teorema Se Ω è semplicemente connesso e $\vec{f} : \vec{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\vec{f}$ irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ conservativo.

Dim. BASTA DIMOSTRARE CHE

$$\oint_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \text{per ogni } \gamma \text{ (in } \Omega\text{)}, \ C^1 \text{ a tratti, chiusa}$$

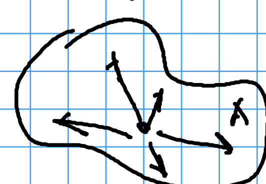
Per questo uso il fatto che – essendo Ω semplicemente connesso – esiste $x_0 \in \Omega$ tale che γ è omotopa alla curva che vale costantemente x_0 : $\gamma_1(t) = x_0 \ \forall t$. Ma allora

$$\oint_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\underbrace{\gamma_1(t)}_{x_0}) \cdot \underbrace{\gamma_1'(t)}_{=0}\, dt = 0$$

DOMANDA: Quando Ω è semplicemente connesso ??

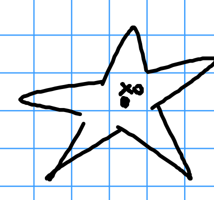
CASO semplice $\rightarrow$ gli aperti stellati

Def. Dico che un insieme A è "stellato" rispetto a un suo punto x_0 ($x_0 \in A$) se



$\forall x \in A$ si ha

$$\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{\text{descrive il segmento tra } x_0 \text{ e } x} \in A \qquad \forall t \in [0, 1]$$

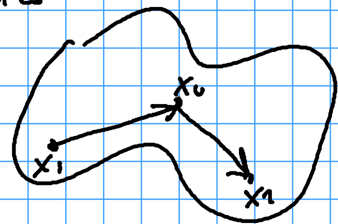


CASO SPECIALE $\underline{A \text{ convesso}}$ (se $x_1, x_2 \in A \Rightarrow$ tutto il segmento $\subset A$)

In questo caso A è stellato rispetto a ogni $x_0 \in A$.

Proposizione Ω stellato $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso

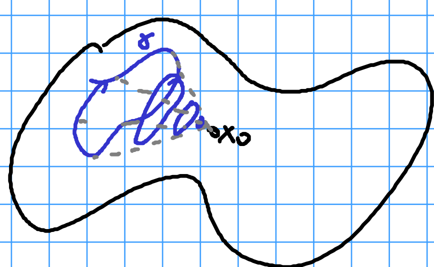
Dim. (1) Ω è connesso; infatti se x_1 e $x_2 \in A$ trovo γ che congiunge x_1 a x_2. Per costruire γ posso "andare" prima da x_1 a x_0 sul segmento e poi da x_0 a x_2 sull'altro segmento



Devo poi dimostrare che ogni curva chiusa è omotopa a una costante. Dato $\gamma : [0,b] \to \Omega$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$ definisco l'omotopia $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ prendendo

$$H(t,s) := \gamma(t) + s(x_0 - \gamma(t))$$

se fisso t e muovo s ho il segmento da $\gamma(s)$ a x_0



- H è continua (ovvio)
- $H(t,0) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0,b]$
- $H(a,s) = \gamma(a) + s(x_0 - \gamma(a)) = \gamma(b) + s(x_0 - \gamma(b)) = H(b,s)$
- $H(t,1) = \gamma(t) + x_0 - \gamma(t) = x_0$

H "deforma" la curva γ nel punto x_0

$\underline{\Omega \text{ è semplicemente connesso}}$ $\#$

OSS. L'idea intuitiva è che "Ω NON HA BUCHI" ← VA BENE IN $\mathbb{R}^2$

SI PUÒ VEDERE (NON LO DIMOSTRO - NON È SEMPLICE)

$$\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ è semplicemente connesso se } N \geq 3$$

IN $\mathbb{R}^3$ - per avere un oggetto NON SEMPLICEMENTE CONNESSO, devo TOGLIERE UNA RETTA $\mathbb{R}^N \setminus \{\text{asse } x\}$ NON È S.C.

OSS. Se $\vec{f}$ è irrotazionale su $\Omega \Rightarrow$ LOCALMENTE $\vec{f}$ è conservativo.

CIOÈ $\forall x_0 \in \Omega$ esiste un $r>0$ tale che $\vec{f}$ è conservativo su $B(x_0, r)$ (perché $B(x_0,r)$ è sempl. conn.)

Dunque esiste $F : B(x_0,r) \to \mathbb{R}$: $\nabla F = \vec{f}$ su $B(x_0,r)$

PURTROPPO non posso in generale estendere F a tutto Ω.

ESEMPIO Esploriamo le proprietà del campo

$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

che, come abbiamo visto, è irrotazionale.

CERCHIAMO UN POTENZIALE per $\vec{f}$ (anche se sappiamo che non è possibile) per capire cosa va storto.

Rifacciamo i conti degli integrali sulle circonferenze:

Prendo $\gamma(t) := R\cos(t)\,\vec{i} + R\sin(t)\,\vec{j}$ $R>0$ fissato

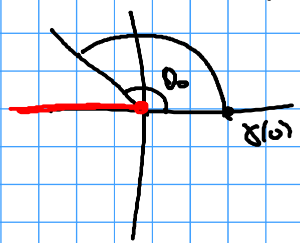
e facciamo variare $t \in [0, \theta_0]$ $\theta_0 > 0$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\theta_0} \vec{f}(R\cos(t), R\sin(t)) \cdot (-R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j})\,dt$$

$$= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{-\cancel{R}\sin(t)}{\underbrace{R^2\cos^2(t)+R^2\sin^2(t)}_{\cancel{R^2}}}\vec{i} + \frac{\cancel{R}\cos(t)}{\underbrace{R^2\cos^2(t)+R^2\sin^2(t)}_{\cancel{R^2}}}\vec{j}\right)\left(-\cancel{R}\sin(t)\vec{i} + \cancel{R}\cos(t)\vec{j}\right)dt$$

$$= \int_0^{\theta_0} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt = \int_0^{\theta_0} 1\, dt = \theta_0$$

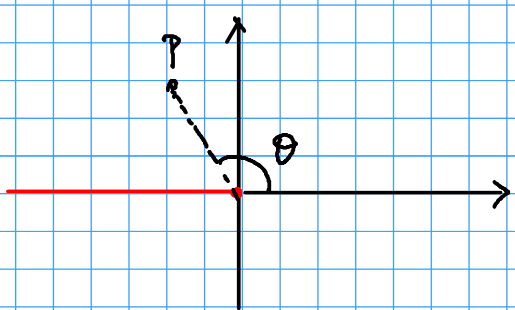
DUNQUE $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ = "angolo tra $\gamma(\theta_0)$ e $\gamma(0)$" che è proprio θ_0



Ne segue che, se prendo come

$$\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$$

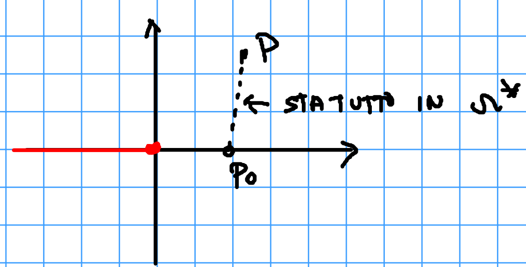
$$\Rightarrow \quad F(P) = \theta = \mathrm{Arg}(P) \quad \text{dove} \quad P = (R\cos\theta, R\sin\theta) \quad -\pi < \theta < \pi$$



Allora F è C^1 ed è un potenziale per $\vec{f}$ su Ω^*

IN EFFETTI (a) Ω^* è semplicemente connesso rispetto a $P_0 = (1,0)$. INFATTI se $(x,y) \in \Omega^*$ ci sono due casi: (1) $x \geq 0$ y qualunque. Allora $\forall t \in [0,1]$ se considero $\gamma(t) = (1,0) + t\left((x,y) - (1,0)\right) =$

$$(1,0) + t(x-1, y) = \big(\underbrace{1 + t(x-1)}_{\geq 1-t \geq 0},\ ty\big) \in \Omega^*$$

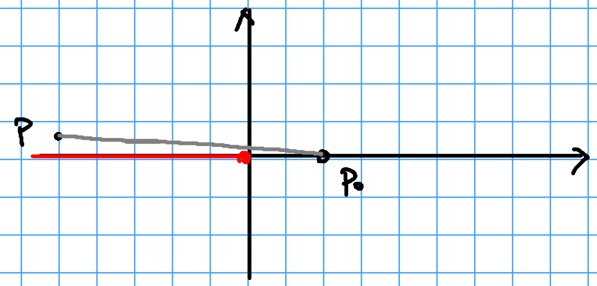


(2) $x < 0$ e $y \neq 0$ In questo caso, se guardo il segmento tra P_0 e P ho

$$\gamma(t) = \big(1 - t(x-1),\ \underbrace{ty}_{\neq 0 \text{ se } t>0}\big)$$

dunque $\gamma(t) \in \Omega^*$ se $t \in \,]0,1]$. Ma $\gamma(0) = P_0 \in \Omega^*$

Dunque $\gamma(t) \in \Omega^*$ $\forall t \in [0,1]$



DUNQUE Ω^* è semplicemente connesso. Allora $\vec{f}$ è conservativo su Ω^* e per trovare un potenziale F

posso definire

$$F(P) := \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove γ è una curva in Ω^* che congiunge P_0 e P.

COME CURVA POSSO l'arco di circonferenza di prima:

$$\gamma(t) := R\cos(t)\,\vec{i} + R\sin(t)\,\vec{j} \qquad 0 \le \theta \le \theta_0$$

(nel caso $\theta_0 \geq 0$ se no $\theta_0 \le \theta \le 0$)

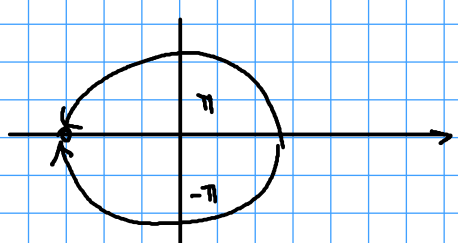
dove $R = \|P\|$ e θ_0 è tale che

$$P = R(\cos\theta, \sin\theta) \qquad -\pi < \theta < \pi$$

Per quanto visto prima $F(P) = \theta = \mathrm{Arg}(P)$

↑ tra $-\pi$ e π

Questa $F(P)$ NON si può prolungare con continuità nei punti $(x,0)$ con $x<0$. "Da sopra" $F(P) \to \pi$, "da sotto" $F(P) \to -\pi$



$\Rightarrow$ NON SI TROVA UN POTENZIALE SU $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

FATTO (che non dimostro) Se $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è irrotazionale

SE (P) $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ su γ = circonferenza che gira intorno $(0,0)$

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y) := \frac{(x^2-y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}}{(x^2+y^2)^2}$$

Quest è un camp C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Vediamo se è irrotazionale.

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}\,1} - (x^2-y^2)\,2\,\cancel{(x^2+y^2)}\,2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$\frac{-2y(x^2+y^2) - 4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = (-2y)\frac{(x^2+y^2+2x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(-2y)(3x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}\,1} - 2xy\,2\,\cancel{(x^2+y^2)}\,2x}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$(-2y)\frac{-x^2-y^2+4x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(-2y)(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$=$!!

Dunque $\vec{f}$ è irrotazionale su $\underline{\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}}$

Proviamo a calcolare $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ su una circonferenza

$$\gamma(t) = R\cos(t)\vec{i} + R\sin(t)\vec{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma'(t) = -R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}$$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2(\cos^2 t - \sin^2(t))\vec{i} + 2R^2\sin(t)\cos t\,\vec{j}}{R^4}\right)\circ\left(-R\sin(t)\vec{i} + R\cos(t)\vec{j}\right)dt$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\left((\cos^2(t) - \sin^2(t))\sin(t) + 2\cos^2(t)\sin(t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2(t) - \underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2(t)}\right)\sin(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} \left(4\cos^3(t) - 1\right)\sin(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{R}\int_1^1 -4s^2\,ds}_{=0} \; \underbrace{-\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\sin(t)\,dt}_{=0}$$

$s = \cos(t) \quad ds = -\sin(t)\,dt$

Quindi $\vec{f}$ è conservativo (per il criterio particolare su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

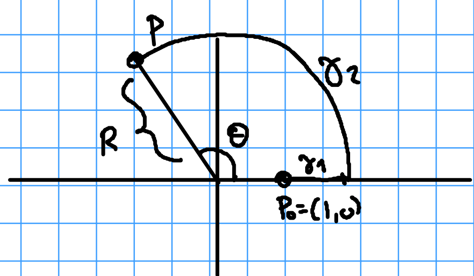
Cerchiamo un potenziale per $\vec{f}$. Dato $P = R(\cos\theta, \sin\theta)$, $0 \le \theta < 2\pi$

posso calcolare F integrando $\vec{f}$ tra $P_0 = (1,0)$ e P

su uno arco γ che congiunge P_0 e P. Scelgo

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove $\gamma_1(t) = 1 + t(R-1)$

$\gamma_2(t) = R(\cos t, \sin\theta) \quad 0 \le t \le \theta$



Facciamo prima $\int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ = (abbiamo i conti sopra ...)

$$= \frac{1}{R}\int_0^{\theta} \left(4\cos^3(t) - 1\right)\sin(t)\,dt = \quad \left(\text{metto } s = \cos(t) \text{ nel primo pezzo}\right)$$

$$\frac{1}{R}\int_1^{\cos(\theta)} -4s^2\,ds - \frac{1}{R}\int_0^{\theta}\sin(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{4}{3}s^3\right]_{\cos(\theta)}^{1} - \frac{1}{R}\left[-\cos(t)\right]_0^{\theta} =$$

$$\frac{1}{R}\,\frac{4}{3}\left(1 - \cos^3(\theta)\right) - \frac{1}{R}\left(-\cos(\theta) + 1\right) =$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{3} + \cos(\theta) - \frac{4}{3}\cos^3(\theta)\right)$$

$\int_{\gamma_1} \vec{f}\, d\vec{s} =$ ...

FINIAMO DOMANI