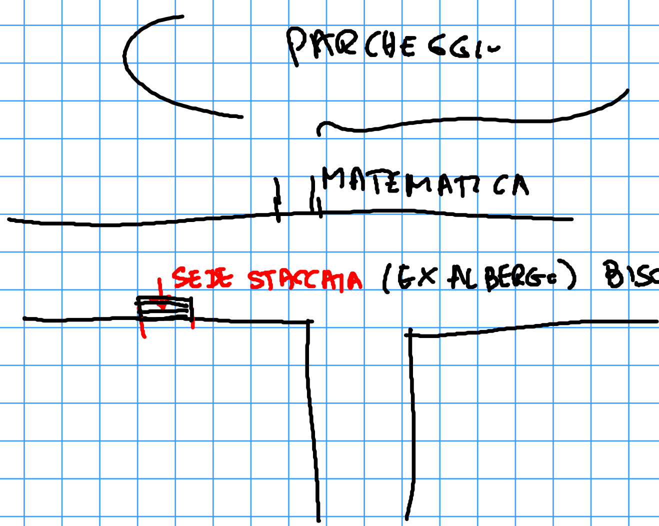
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 53 03/04/2025

DOMANI (VENERDÌ 4/4) RICEVIMENTO PER VEDERE I COMPITINI AL DIP. MATEMATICA (EDIFICIO EX ALBERGO)

ORE 15.00 – 18.00



TEOR. $\vec{g}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ continuo su Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, Ω connesso

(a) $\vec{g}$ conservativo $\iff$ (b) Date $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti, con $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ si ha

$$\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b) già visto. Per dim. che (b) $\Rightarrow$ (a) fisso $P_0 \in \Omega$ e definisco $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo

(*) $F(P) = \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s}$ dove γ è una qualunque curva C^1 a tratti: $\gamma(a) = P_0$ $\gamma(b) = P$

Vediamo che F ammette derivate parziali e che

$$(*) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = f_i(P) \qquad \forall P \in \Omega \qquad \forall i = 1 \dots N$$

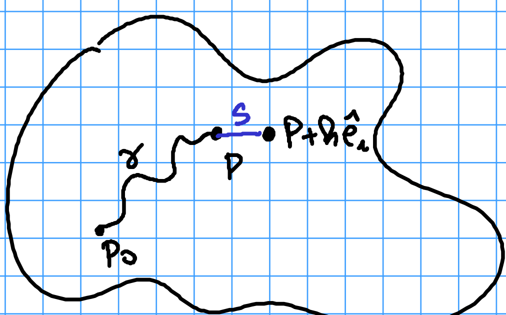
Per dimostrare $(*)$ prendo $\hat{e}_i$ il versore i-esimo e considero il rapp. incr.

$$\frac{F(P + h\hat{e}_i) - F(P)}{h}$$

So che c'è una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti, t.c. $\gamma(a) = P_0$, $\gamma(b) = P \implies F(P) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Considero $s : [0,1] \to \Omega$ il segmento tra P e $P + h\hat{e}_i$

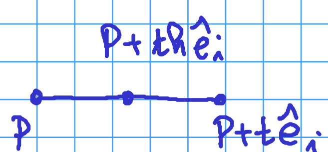
(Sto supponendo che il segmento tra P e $P + h\hat{e}_i$ sia tutto in Ω — questo è vero se h è piccolo)



So che

$$\boxed{s(t) = P + t\left(P - (P + h\hat{e}_i)\right) = P + t h \hat{e}_i \;;\; s'(t) = h\hat{e}_i}$$

al variare di $t \in [0,1]$



Allora posso considerare la curva $\gamma_h : [a, b_1] \to \Omega$ ottenuta incollando il segmento a γ. γ_h parte da P_0, arriva in P, e poi continua (sul segmento) fino a $P + h\hat{e}_i$. DUNQUE

$$F(P + h\hat{e}_i) = \int_{\gamma_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_s \vec{f} \cdot ds = F(P) + \int_s \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\implies \frac{F(P + h\hat{e}_i) - F(P)}{h} = \frac{1}{h}\int_s \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{\text{(per def.)}}{=} \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 \vec{f}(P + th\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_i \, \cancel{h} \, dt$$

$$= \int_0^1 \vec{f}(P + th\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_i \, dt = \int_0^1 f_i(P + th\hat{e}_i) \, dt$$

LO RISCRIVO

$$\frac{F(P+h\hat{e}_i)-F(P)}{h} = \int_0^1 f_i(P+th\hat{e}_i)\,dt$$

Se faccio il limite per $h \to 0$ vedo che l'integrando tende (puntualmente rispetto a t) a $f_i(P)$. SI PUÒ VEDERE, usando la continuità di f_i che il limite è uniforme rispetto a t per cui si può scambiare integrale e limite $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = \lim_{h\to 0} \frac{F(P+h\hat{e}_i)-F(P)}{h} = \int_0^1 f_i(P)\,dt = f_i(P)$$

Dunque tutte le derivate parziali i-esime esistono e sono uguali a f_i (CHE È CONTINUA)

Usando il diff. totale si ottiene che F è $C^1(\Omega)$ e naturalmente

$$\nabla F = \vec{f} \qquad (F \text{ è un potenziale per } \vec{f})$$

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

Questo conclude la dim. di (a) $\Leftrightarrow$ (b). Inoltre ho dimostrato una formula per il potenziale (la ★★). Vediamo che la ★★ ci dà tutti i possibili potenziali, a meno di una costante. Infatti se F_1 è un altro potenziale $\Rightarrow$

$$\nabla(F_1 - F) = \vec{f} - \vec{f} = 0$$

Dato che Ω è connesso ne segue $F_1 - F =$ costante.

<u>OSS.</u> La proprietà (b) è equivalente a

(c) $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \forall\, \gamma$ curva C^1 a tratti <u>CHIUSA</u>

<u>Dim.</u> (b) $\Rightarrow$ (c) infatti se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è chiusa, allora $\gamma(b) = \gamma(a) = Q$. Posso considerare la curva $\gamma_0(t) = Q_0$ $\forall t \in [0,b]$

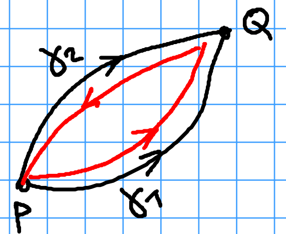
γ_0 ha gli stessi estremi di γ. Per la (b) deve essere

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0} \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{perché } \gamma_0'(t) = 0 \ \forall t$$

$$\int_a^b \vec{f}(\gamma_0(t)) \cdot \gamma_0'(t)\, dt = 0$$

VICEVERSA Suppongo che valga (d). Prendo due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi. Definisco $\gamma := \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$

la γ_2 percorsa a rovescio



Si vede che γ è chiusa $\Rightarrow$

$$0 = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot ds \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

ESEMPIO Mostriamo – di nuovo – che $\vec{f}(P) := A\vec{P}$ (dove A è una matrice $N\times N$) è conservativo $\Leftrightarrow$ A è simmetrica

Prendiamo due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ in $\mathbb{R}^N$ ~~(linearmente indipendenti)~~

e poniamo $\gamma(t) := \cos(t)\vec{v}_1 + \sin(t)\vec{v}_2 \qquad 0 \le t \le 2\pi$

γ è chiusa ed è C^1. Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$

cioè $\int_0^{2\pi} f(\cos(t)\vec{v}_1 + \sin(t)\vec{v}_2)\cdot(-\sin(t)\vec{v}_1 + \cos(t)\vec{v}_2)\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} A(\cos(t)\vec{v}_1 + \sin(t)\vec{v}_2)\cdot(-\sin(t)\vec{v}_1 + \cos(t)\vec{v}_2)\, dt =$

$A\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t)\, dt + A\vec{v}_1\, \vec{v}_2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt +$

$- A\vec{v}_2\, \vec{v}_1 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt + A\,\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt$

SI VEDE FACILMENTE CHE $\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \pi$

$$\left(\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \pi = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt\right)$$

DUNQUE

$$0 = \pi(A\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2) - \pi(A\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1) \iff A\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = A\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1$$

cioè A è simmetrica. ($\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ A simmetrica)

Viceversa supponiamo che A sia simmetrica. Poniamo

$$F(\vec{v}) = \frac{A\vec{v}\cdot\vec{v}}{2} \quad \text{(la forma quadratica)}$$

Voglio dimostrare che $\nabla F(\vec{v}) = A\vec{v}$ $\left(= \vec{f}(\vec{v})\right)$

(1) MODO BRUTALE: se $x = (x_1 \dots x_N) \Rightarrow 2F(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,x_i x_j$

dove a_{ij} sono le componenti di A. Allora

$$2\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k}x_i\right)x_j + x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right] =$$

$$\left(\text{USIAMO LA NOTAZIONE } \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n\neq m\end{cases}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\left(\delta_{ik}x_j + x_i\delta_{jk}\right) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\delta_{ik}x_j + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\delta_{jk}x_i =$$

$$= \sum_{j=1}^N a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^N a_{ik}x_i = \quad \text{(uso la simmetria)}$$

$$\sum_{j=1}^N a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^N a_{ki}x_i = 2\sum_{j=1}^N a_{kj}x_i = 2(Ax)_k$$ COMPONENTE K-ESIMA DI Ax

Ho trovato che $\frac{\partial F}{\partial x_k} = (Ax)_k = \vec{f}_k(x)$

(2) Modo "astratto" Cerco le derivate direzionali di $F(x) = \frac{1}{2}Ax\cdot x$

Fisso $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ e considero $\dfrac{F(x+t\vec{v})-F(x)}{t} =$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{t}\left(A(x+t\vec{v})\cdot(x+t\vec{v}) - Ax\cdot x\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{t}\left(\cancel{Ax\cdot x} + tA\vec{v}\cdot x + t\,Ax\cdot\vec{v} + t^2 A\vec{v}\cdot\vec{v} - \cancel{Ax\cdot x}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(A\vec{v}\cdot x + Ax\cdot\vec{v}\right) + \frac{t}{2}A\vec{v}\cdot\vec{v} \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{2}A\vec{v}\cdot x - Ax\cdot\vec{v}$$

Questa espressione è continua in $\vec{v}$ $\Rightarrow$ (diff. totale) ho che

$$F'(x)(\vec{v}) = dF(x)\vec{v} = \frac{1}{2}\left(A\vec{v}\cdot x - Ax\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\left((A^t x + Ax)\cdot\vec{v}\right)$$

IN ALTRI TERMINI $\boxed{\nabla F(x) = \frac{1}{2}(A+A^t)x}$

SE A è simmetrica $\nabla F(x) = Ax = \vec{f}(x)$

CAMPI IRROTAZIONALI

Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1 (non solo continua) dico che $\vec{f}$ è "IRROTAZIONALE" quando $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $\quad i,j = 1..N$

che è come dire che $J_{\vec{f}}$ è una matrice simmetrica

TEOREMA Se $\vec{f}$ è C^1 ed è conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è irrotazionale

Dim $\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow \exists\, F: \Omega \to \mathbb{R} : \nabla F = \vec{f}$ cioè

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i \qquad i = 1..N.$$

Se derivo rispetto a x_j $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\quad (J_{\vec{f}} = H_F)$

Ma F è C^2 (per come nasce..) $\Rightarrow$ vale Schwartz e quindi H_F è simmetrico $\iff J\vec{f}$ è simmetrico, cioè vale la tesi. #

<u>OSS.</u> Se $N=3$ si definisce il rotore di $\vec{f}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = \overset{\text{(formalmente)}}{\det}\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & f_1 \\ \vec{j} & D_y & f_2 \\ \vec{k} & D_z & f_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} (D_y f_3 - D_z f_2)\,\vec{i} \\ -(D_x f_3 - D_z f_1)\,\vec{j} + \\ (D_x f_2 - D_y f_1)\,\vec{k} \end{array}$$

$\left(D_x = \frac{\partial}{\partial x} \dots\right)$

Chiaramente $\vec{f}$ è irrotazionale $\iff \mathrm{rot}\,\vec{f} = 0$ (IN $\mathbb{R}^3$) #

INVECE NON VALE L'IMPLICAZIONE $\Longleftarrow$:

ci sono campi irrotazionali non conservativi.

<u>ESEMPIO</u> $\vec{f}(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Vediamo che $\vec{f}$ è irrotazionale $\iff \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}$

Calcolo $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

sono eguali !!

Calcolo $\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(x^2+y^2)+2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

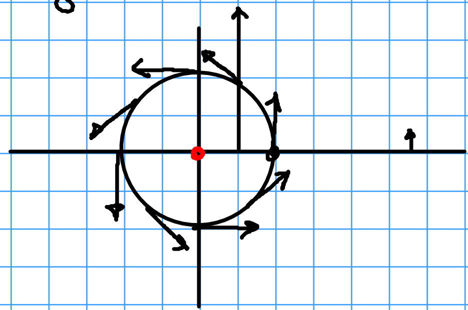
Vediamo che $\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO, MOSTRANDO CHE ci sono curve chiuse γ su cui $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \neq 0$.

Prendo la circonferenza $\gamma(t) := \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}$

$$\int_0^{2\pi} \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,\vec{i} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,\vec{j}\right)\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)+\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$



$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$$

CONSERVATIVO $\Longrightarrow$ IRROTAZIONALE

$\cancel{\Longleftarrow}$ (in generale)

È UN PROBLEMA INTERESSANTE CAPIRE QUANDO VALE $\Longleftarrow$. DIPENDE DALLA "FORMA" DI Ω (Ω non deve avere "buchi" e CASO $N=2$)

Servono delle definizioni

DEF. (OMOTOPIA tra curve). Supponiamo che $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ sono due curve continue. Considero due casi

(a) γ_0 e γ_1 hanno gli stessi estremi
$P = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ / $Q = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

(b) γ_0 e γ_1 sono chiuse

CHIAMO OMOTOPIA TRA γ_0 e γ_1 (tra curve con gli stessi estremi / tra curve chiuse) una funzione $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ ($H(t,s)$ $t \in [a,b]$, $s \in [0,1]$)

H continua in (t,s) e tale che

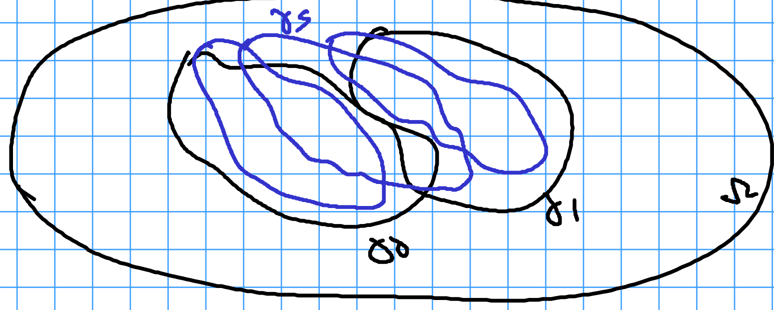
(1) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ $\quad H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$

(2) (a) $H(a,s) = P$ $\quad \forall s \in [0,1]$
$H(b,s) = Q$ $\quad \forall s \in [0,1]$

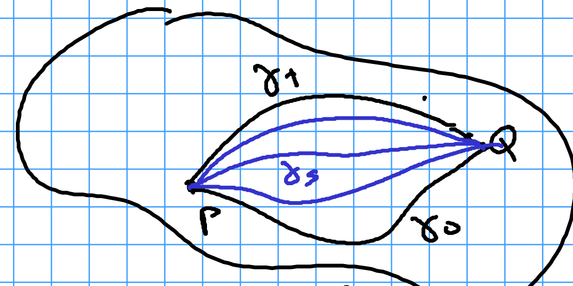
(b) $H(a,s) = H(b,s)$ $\quad \forall s \in [0,1]$

Se scrivo $\gamma_s(t) = H(t,s)$ ho introdotto una famiglia di curve γ_s, che dipendono dal parametro s, tali che per $s=0$ ho γ_0, per $s=1$ ho γ_1 e ogni γ_s ha gli stessi estremi / è chiusa

$\to$ La H mi definisce "una deformazione continua dentro Ω" tra γ_0 e γ_1



CURVE CHIUSE



CURVE TRA P e Q

Def. Se esiste un'omotopia tra γ_0 e γ_1 dico che γ_0 è omotopa a γ_1 ($\Leftrightarrow$ γ_1 è omotopa a γ_0) (o tra curve da P a Q / tra curve chiuse)

TEOREMA Se $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso)

f è irrotazionale $\Longrightarrow$

date γ_0 e γ_1 omotope $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma_0} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}$

(non distinguo il caso (a) e il caso (b))

DIM (IN UN CASO PIÙ FAVOREVOLE IN CUI l'omotopia è C^1)

Supponiamo dunque che $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ siano chiuse, C^1, (dunque considero il caso (b) — il caso (a) è simile)

ed $\exists\ H: [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ anche H C^1 e tale che

$$\underbrace{H(t,0) = \gamma_0(t),\quad H(t,1) = \gamma_1(t)\ \forall t}_{\text{deformo } \gamma_0 \text{ in } \gamma_1}, \qquad \underbrace{H(a,s) = H(b,s)\ \forall s}_{\text{ogni } \gamma_s \text{ intermedio è chiuso}}$$

Consideriamo $\displaystyle\phi(s) = \int_{\gamma_s} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ $\qquad (\gamma_s(t) = H(t,s))$

dimostro che $\phi'(s) = 0 \Rightarrow \phi(s)$ è costante $\Longrightarrow \phi(0) = \phi(1)$ che è la tesi

Daremo per buono che si possono scambiare derivate e integrali (per questo dovremmo ricondurci ai teoremi visti ...)

$$\phi'(s) = \frac{d}{ds}\int_{\gamma_s} \vec{f}\cdot d\vec{s} \overset{\text{def.}}{=} \frac{d}{ds}\int_a^b \vec{f}\,(H(t,s)) \cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} H(t,s)}^{\gamma_s'(t)}\, dt \overset{\text{(MI FIDO)}}{=}$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s)\right) dt \quad = \quad (\text{calcolo delle derivate})$$

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\vec{g}(H(t,s))\right)\cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) + \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t,s)\right] dt =$$

$$\int_a^b \left[\left(J_{\vec{g}}(H(t,s)) \frac{\partial}{\partial s} H(t,s)\right)\cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) + \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t,s)\right] dt$$

|| passaggio chiave $J_{\vec{g}}$ è simmetrico

$$\int_a^b \left[\left(J_{\vec{g}}(H(t,s)) \frac{\partial}{\partial t} H(t,s)\right)\cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) + \vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} H(t,s)\right] dt$$

|| rifaccio a ritroso tutti i passaggi con t al posto di s

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s)\right) dt \quad = \quad (\text{teo. fon. calcolo})$$

$$\left[\vec{g}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right]_{t=a}^{t=b} = 0$$

perché $H(a,s) = H(b,s)$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial H}{\partial s}(a,s) = \frac{\partial H}{\partial s}(b,s)$$

DUNQUE $\quad \phi' = 0 \Rightarrow \phi = \text{costante} \Longrightarrow$ bai !!!