Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

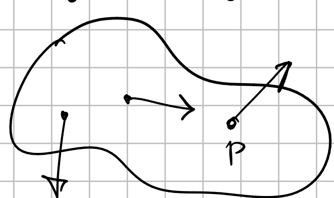
Lezione 52   02/04/2025

3° COMPITINO: 30/4 ore 17.30 aula F9
(le iscrizioni sono aperte su valutami.unipi.it)

CAMPI CONSERVATIVI

Def. Chiamo "campo" una funzione $\vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^N$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto
(dimensione in partenza = dimensione in arrivo)

Posso immaginare $\vec{f}(P)$ come una "freccia" applicata nel punto $P \in \Omega$



Considereremo sempre $\vec{f}$ CONTINUA.

Def. Dico che un campo $\vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^N$ è "conservativo" se esiste $F:\Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ non $\mathbb{R}^N$!!) di classe C^1, tale che

$$\vec{f}(x) = \nabla F(x) \quad \forall x \in \Omega$$

F viene detta "potenziale" per $\vec{f}$

$$\Updownarrow$$

$$f_i(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega \ \forall i = 1 \dots N$$

($\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$, f_i sono le componenti di $\vec{f}$)

Se $N=3$ di solito scrivo $\vec{f}$ così:

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

$$\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \left(= \hat{e}_1\right) \quad \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \left(= \hat{e}_2\right) \quad \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \left(= \hat{e}_3\right)$$

(o anche se $N=2$ $\quad \vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j}$)

<u>OSS.</u> Se $N=1$ tutti i campi sono conservativi perché ogni funzione continua ha una primitiva (T.F.C.I.)

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi + \text{cost.} \qquad \Rightarrow F' = f$$

Le primitive sono infinite e - se Ω è connesso - differiscono tutte (tra di loro) per una costante

Se $N \geq 2$ NON TUTTI I CAMPI SONO CONSERVATIVI.

Per esempio, consideriamo $N=2$ e prendiamo $\vec{f}$ def. da

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$ $\left(\vec{f} \text{ è LINEARE}: \quad \vec{f}(x,y) = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$

Vediamo quando $\vec{f}$ è conservativo. Se lo è deve esistere un potenziale $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe C^1, t.c.

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = ax + by$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = cx + dy$

Da (a) - tengo fisso y e guardo solo la x - INTEGRO TRA 0 E x

$$\int_0^x (at + by)\,dt = F(x,y) - F(0,y)$$

Dunque $\boxed{F(x,y) = F(0,y) + \frac{a}{2}x^2 + bxy}$

Uso la (b) sulla F che ho appena trovato

$$cx + dy = \frac{\partial F(0,y)}{\partial y} + bx$$ INTEGRO IN y tra 0 e y

$$\int_0^y (cx - bx + d\xi)\, d\xi = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} F(0,\xi)\, d\xi$$

$$(c-b)xy + \frac{d}{2} y^2 = F(0,y) - F(0,0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dipende solo da } y}}{F(0,y)} = F(0,0) + \underbrace{(c-b)xy}_{\text{dipende anche da } x} + \frac{d}{2} y^2$$

l'unico modo per avere che l'espressione a destra dipenda solo da y è che $\boxed{c = b}$

A è simmetrica

F esiste $\iff$ $c = b$ e in questo caso

$$F(x,y) = \frac{a}{2} x^2 + b\,xy + \frac{d}{2} y^2$$ (la forma quadratica associata a $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$)

Riassumendo $\vec{f}(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è conservativo $\iff$ A è simmetrica

e in tal caso $F(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\left(F(\vec{p}) = \vec{p}^{\,t} A \vec{p} \right)$

QUESTA PROPRIETÀ È VERA $\forall\, N \geq 2$ (la ritroveremo dopo)

Proprietà dei campi conservativi RISPETTO agli integrali curvilinei

RICORDO se γ è C^1 (C^1 a tratti andrebbe bene ...) $\gamma : [a,b] \to \Omega$

$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$.
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

PROPRIETÀ Se $\vec{f}$ ha come potenziale F e $\gamma : [a,b] \to \Omega$

è C^1 $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{g}(\gamma(t))\circ\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\nabla F(\gamma(t))\circ\gamma'(t)}_{\frac{d}{dt}F(\gamma(t))}\,dt =$$

derivazione della funzione composta

def. di integrale curv. II° specie

$\vec{g} = \nabla F$

Teor. Fond. Calcolo Integrale

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(F(\gamma(t))\Big)\,dt = \Big[F(\gamma(t))\Big]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

DUNQUE $\int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ ← DIPENDE SOLO DAGLI ESTREMI DELLA CURVA γ

Questo è (detto meglio) una caratterizzazione dei campi conservativi

<u>REMIND</u> Ω connesso vuol dire che $\forall P,Q\in\Omega$ esiste γ, $\gamma:[a,b]\to\Omega$, C^1, t.c. $\gamma(a)=P$ $\gamma(b)=Q$

<u>TEOREMA</u> Sia $\vec{g}:\Omega\to\mathbb{R}^N$, continua Ω CONNESSO.

Allora

(a) $\vec{g}$ è conservativo $\Longleftrightarrow$ (b) $\begin{cases} \text{Se } \gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\Omega \text{ sono } C^1 \text{ e hanno} \\ \text{gli stessi estremi, cioè } \gamma_1(a)=\gamma_2(a),\ \gamma_1(b)=\gamma_2(b) \\ \text{allora } \int_{\gamma_1}\vec{g}\circ d\vec{s} = \int_{\gamma_2}\vec{g}\cdot d\vec{s}\end{cases}$

(c) Inoltre, Dato $P_0\in\Omega$ FISSATO, se $\vec{g}$ è conservativo, il potenziale $F:\Omega\to\mathbb{R}$ è della forma

$$F(P) = \int_\gamma \vec{g}\cdot d\vec{s} + \text{cost.}$$ ← DIPENDE SOLO DA P, dato che vale (b) (γ esiste perché Ω è connesso)

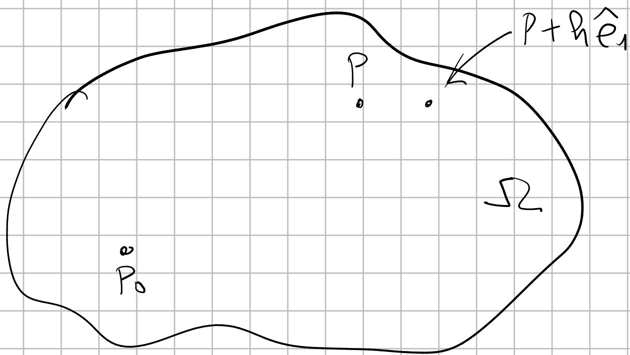
dove $\gamma:[a,b]\to\Omega$, γ C^1, $\gamma(a)=P_0$, $\gamma(b)=P$.

<u>DIM.</u> (a) $\Rightarrow$ (b) è già stato dimostrato prima. (PROPRIETÀ di prima)

(b) $\Rightarrow$ (a) Considero la funzione F definita nella tesi (c)

Vediamo che F è un potenziale per $\vec{f}$!!

Fisso i tra 1 e N e dimostro che $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = f_i(P)$ $\forall P \in \Omega$



Devo fare il rapporto incrementale

$$\frac{F(P + h\hat{e}_i) - F(P)}{h} \xrightarrow{h \to 0} ??$$

VEDIAMO DOMANI LA CONCLUSIONE