Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 31/03/2025

Serie di Fourier in L^2:

- Definita la norma $L_2(A)$: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}$
  ($f : A \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ misurabile)

Teorema (a) Se $f \in L^2([0,T])$ allora posso dire che

$$\boxed{f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n} \qquad \text{dove} \quad e_n(t) = e^{in\omega t} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle$$

nel senso che $\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_n e_n \right\|_2 \longrightarrow 0$

$$\Updownarrow$$

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} \int \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{in\omega t} \right|^2 dt = 0$$

Inoltre $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$

(b) Viceversa se (c_n) è tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

allora esiste $f \in L^2$: $\displaystyle f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ (nel senso $(*)$)

Inoltre $\displaystyle c_n = \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$

IL TEOREMA SOPRA VALE ANCHE per la forma reale:

<u>Teorema</u> (a) Se $f \in L^2([0,T]; \mathbb{R})$ $\quad (f : [0,T] \to \mathbb{R})$

allora $$f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin m(\omega t) \leftarrow$$

dove $a_0 = \frac{1}{T} \int f$; $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m(\omega t)\,dt$

e si ha

$$\|f\|_2^2 = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_m^2) \qquad \text{(PARCEVAL - caso reale)}$$

(b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_m^2 < +\infty$ allora esiste $f \in L^2$:

$$f \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)$$

e si ha $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f$ $\quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f \cos(n\omega t)$ $\quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f \sin(n\omega t)$

<u>Teorema</u> (a) Se $f \in L^2([0,L])$ si ha

$$f \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n \qquad \text{dove } s_n(x) = \sin(n\omega_0 x) \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L}$$

e $$u_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_0 x)\,dx$$

oppure $$f \underset{L^2}{=} v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n c_n \qquad \text{dove } c_n(x) = \cos(n\omega_0 x)$$

e $v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$, $n \geq 1$ $v_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega_0 x)\,dx$

e vale $$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 = \frac{2}{T} \|f\|_2^2 = \frac{2}{T} \int_0^L f(x)^2\,dx$$

oppure $$T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^L f(x)^2\,dx$$

(b) Se viceversa $\sum |u_n|^2 < +\infty$ $\left(\sum |v_m|^2 < +\infty\right) \Rightarrow$ esiste $f \in L^2$:

$$f \underset{L^2}{=} \sum_{1}^{\infty} u_m c_m \quad \left(= \sum_{1}^{\infty} v_m c_m + v_0\right)$$

e valgono le formule per u_n / v_n

POSSIBILE APPLICAZIONE

Data $f \in L^2([0,L])$ voglio soluzioni del problema

$$(P) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

N.B. f in generale non è continua – DI PER SÉ f è definita "quasi ovunque" $\Rightarrow$ non è chiaro come definire l'equazione differenziale.

PER FARE QUALCOSA $\rightsquigarrow$ ripetiamo l'argomento della volta scorsa: cerco $y \underset{(?)}{=} \sum_1^\infty y_n s_n$ $\quad (s_n(x) = \sin(n\omega_0 x))$

Come l'altra volta – se tutto va bene –

$$y' = \sum_1^\infty y_n s_n', \quad y'' = \sum_1^\infty y_n s_n'' = \sum_1^\infty y_n (-n^2\omega_0^2) s_n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_1^\infty y_n(-n^2\omega_0^2 + \lambda) s_n = f$$

Dato che $f \in L^2$ so che $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^\infty f_n s_n$, dove $f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_0 x)dx$

dunque ho $\sum_1^\infty \left[y_n(\lambda - n^2\omega_0^2) - f_n\right] s_n = 0$

e quindi sono indotto a considerare

$$(C) \quad y_n(\lambda - n^2\omega_0^2) = f_n \quad \forall n$$

AMMETTIAMO CHE $\lambda \neq n^2\omega_0^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora ricavo

$$y_n = \frac{f_n}{\lambda - n^2\omega_0^2}$$

cioè

$$y(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{\lambda - n^2\omega_0^2}\sin(n\omega_0 x) \qquad (Y)$$

TALE $y(x)$ ha senso ?? Sì, ho $\sum_1^\infty |f_n|^2 < +\infty$ perché $f \in L^2$

$$\Rightarrow \quad |y_n|^2 \le \frac{|f_n|^2}{|\lambda - n^2\omega_0^2|^2} \le \text{cost.}\ |f_n|^2$$

(per il fatto che $\frac{1}{\lambda - n^2\omega_0^2} \to 0$)

dunque $\sum_1^\infty |y_n|^2 < +\infty \Rightarrow y \in L^2$ dunque (Y) vale nel senso di L^2. Però posso dire di più:

$$(n^2 y_n)^2 \le \frac{n^4 |f_n|^2}{(\lambda - n^2\omega_0^2)^2} \le K\,|f_n|^2 \quad \text{per } K \in \mathbb{R}$$

perché $\frac{n^4}{(\lambda - n^2\omega_0^2)^2} \to \frac{1}{\omega_0^2} \in \mathbb{R}$

dunque $\left[\ \sum_{n=1}^\infty (n^2 y_n)^2 = \sum_{n=1}^\infty n^4 y_n^2 < +\infty\ \right]$

DICO CHE DA QUEST'ULTIMA DISUGUAGLIANZA RICAVO $\boxed{\sum_{n=1}^\infty n|y_n| < +\infty}$ ($\Rightarrow y \in C^1$!!)

Infatti $\sum_{n=1}^\infty n|y_n| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} n^2 |y_n| \le \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} n^4 y_n^2\right) =$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}}_{<+\infty} + \frac{1}{2}\sum_1^n n^4 y_n^2 < +\infty$$

DUNQUE, se $y(x) \overset{L^2}{=} \sum_1^\infty \frac{f_n}{\lambda - n^2\omega_0^2} \sin(n\omega_0 x)$

$\Rightarrow$ y è di classe C^1, la serie che definisce y converge uniformemente e la serie delle derivate converge alla derivata y'.

IN PARTICOLARE $y(0) = y(L) = 0$ (ha senso ed) è vera e y è C^1. y non è C^2 dunque l'equazione $y''+\lambda y = f$ non è vera in senso tradizionale. PERÒ

$$y = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_m s_m}_{S_n} = \qquad \text{(UNIFORME)}$$

S_n sono di classe C^2 e - seguendo come sono costruite -

$$S_n'' = \frac{d^2}{dx} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_m}{(\lambda-\omega_0^2 m^2)} s_m = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-m^2\omega_0^2}{(\lambda - m^2\omega_0^2)}}_{\text{limitato}} f_m s_m$$

Per gli stessi motivi di prima è facile vedere che

$$S_n'' \xrightarrow{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{m^2\omega_0^2}{(\lambda - m^2\omega_0^2)} f_m s_m = h$$ che è una funzione L^2

DUNQUE y è limite in L^2 di una successione di funzioni C^1 (le S_n) le cui derivate seconde tendono in L^2 a una funzione h. POSSO DIRE CHE y ammette derivata seconda in senso di L^2 e che $h = y''$ in senso L^2

DUNQUE NON HO $y''(x) = h(x)$ $\forall x$, ma una cosa più debole. ($\exists\, S_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} y$ con $S_n'' \xrightarrow{L^2} h$)
$S_n \in C^2$

CON QUESTA DEFINIZIONE DEBOLE la y di prima RISOLVE il problema (P).

QUESTA IDEA, di introdurre delle nozioni più deboli di derivata, È MOLTO UTILE.

ESEMPI Come per f'' posso fare per f':

Def. Se $f, g \in L^2$ dico che è derivabile in senso L^2

e $g = f'$ se:

② $\exists f_n$ funzioni C^1 tali che $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $f_n' \xrightarrow{L^2} g$

FATTO Se f ammette derivata $L^2 \Rightarrow f$ è continua

(a rigore esiste un "rappresentante" continuo di f.)

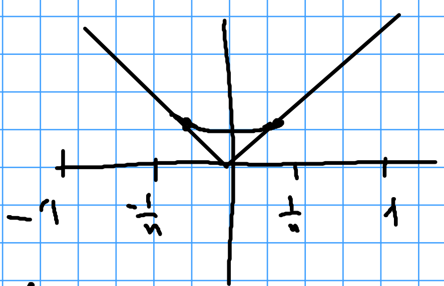
NON LO DIMOSTRO

ESEMPI $f(x) = |x|$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Dico che f è derivabile in senso L^2 e $f'(x) = \mathrm{sgn}(x)$

IN EFFETTI avevamo visto che

f è limite uniforme di f_n, definite da

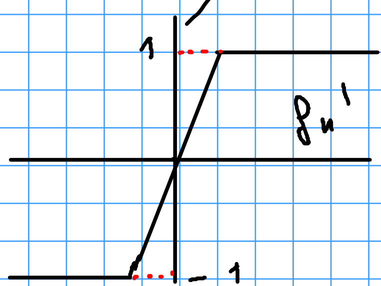


$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(in questo modo $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

$f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = n\frac{1}{n} = 1$)

$$\text{Allora } f_n' = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x) & \text{se } |x| \geq 1/n \\ nx & \text{se } |x| \leq 1/n \end{cases}$$



Dico che $f_n' \to \underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{g}$ in L^2. Infatti:

$$\|f_n' - g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n'(x) - g(x))^2\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} \underbrace{(nx - \mathrm{sgn}(x))^2}_{\leq 1}\,dx \leq$$

$$\int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{2}{n} \to 0$$

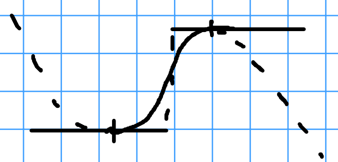
TORNA

OSS. Se prendo $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

f NON AMMETTE DERIVATA L^2, a causa del fatto (non dimostrato...) che per avere derivata L^2 f deve essere continua.

NON È POSSIBILE TROVARE una succ. f_n di funzioni C^1 che tendono (L^2) a f e tali che f_n' abbia limite in L^2

Se ci provassimo potremmo pensare a "lisciare" la f



Per esempio potrei cercare una $f_n(x)$ tale che $f_n(x) = \mathrm{sgn}(x)$ fuori da $[-1/n, 1/n]$ e che si raccordi in modo C^1 nei due pti $-\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n}$. Per esempio

$$f_n(x) = a x^3 + bx \qquad \text{IN MODO CHE}$$

$$1 = f_n(1/n) \iff \frac{a}{n^3} + \frac{b}{n} = 1$$

$$f_n'(1/n) = 0 \iff 3a\left(\frac{1}{n}\right)^2 + b = 0 \iff 3a + n^2 b = 0$$

$$\boxed{a = -\frac{n^2 b}{3}} \qquad 1 = -\frac{n^2 b}{3n^3} + \frac{b}{n} = -\frac{b}{3n} + \frac{b}{n} = \frac{2b}{3n}$$

$$\boxed{b = \frac{3}{2}n} \qquad \boxed{a = -\frac{n^3}{2}} \qquad f_n(x) = -\frac{n^3}{2}x^3 + \frac{3}{2}nx \quad \text{se } |x| < \frac{1}{n}$$

$$f_n'(x) = -\frac{3}{2}n^3x^2 + \frac{3}{2}n \quad \text{se } |x| < \frac{1}{n} \qquad f_n'(x) = 0 \quad \text{se } |x| \geq \frac{1}{n}$$

SERVIREBBE CHE $f_n' \xrightarrow{L^2} g$. È "ragionevole" che $g(x) = 0$ se $x \neq 0$ e dunque dovrei avere $\|f_n'\|_2 \to 0$

PERÒ $\|f_n'\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n')^2 = \int_{-1/n}^{1/n} \left[\frac{3}{2}n\left(1 - n^2x^2\right)\right]^2 dx =$

$$\frac{9}{4}n^2\int_{-1/n}^{1/n}(1-n^2x^2)^2\,dx = \frac{9}{4}n^2\int_{-1/n}^{1/n}(1-2n^2x^2+n^4x^4)\,dx =$$

$$\frac{9}{4}n^2\left[x-\frac{2}{3}n^2x^3+\frac{n^4}{5}x^5\right]_{-1/n}^{1/n} = \frac{9}{4}n^2\cdot 2\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\frac{n^2}{n^3}+\frac{n^4}{5}\frac{1}{n^5}\right) =$$

$$9\frac{n^2}{n}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \text{costante}\cdot n \to \infty$$

NON TORNA

Queste f_n dunque non vanno bene. IN REALTÀ – se ci fidiamo del fatto sopra – nessuna scelta di f_n può andare bene.

MORALE: Se introduco una nozione di derivata "debole" (usando le approssimazioni L^2) allora il problema P ha soluzione unica (nell'ipotesi di "non risonanza" $\lambda \neq \omega^2 n^2 \ \forall n$)

La sol. ha derivata seconda "debole" ma ha derivata prima "forte" e quindi y è continua e si annulla agli estremi.

Si potrebbe studiare il problema con derivata nulla al bordo

$$(P_1)\ \begin{cases} y''+\lambda y = f \\ y'(0)=y'(L)=0 \end{cases} \qquad (f\in L^2)$$

usando le serie di coseni. Anche in questo caso si trova una y che ha derivata seconda debole ma derivata prima "forte" $\Rightarrow$ ha senso $y'(0)=y'(L)=0$.

PROBLEMI PIÙ INTERESSANTI (che si trattano con queste tecniche) sono dei problemi alle derivate parziali. Per esempio

L'eq. delle corde vibranti: L'incognita è una funzione $u(x,t)$ dove x è la posizione $0\le x\le L$ e t è il tempo $t\in\mathbb{R}$.

Le condizioni su u (dico il risultato senza ricavarlo)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \le x \le L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

forze esterne sulla corda

ASSEGNATE

u_0 (forma iniziale)

v_0 (velocità iniziale)

Si può cercare di trovare $u(x,t)$ come serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, s_n(x)$$

$s_n(x) = \sin(n\omega_0 x)$

$\omega_0 \frac{\pi}{L}$

u_n funzioni di t da trovare

Se faccio dei calcoli "euristici"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\, s_n(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-\omega_0^2 n^2)\, s_n$$

Posso anche supporre che il termine noto f si scriva $f = \sum f_n(t)\, s_n$

e quindi arrivo alla condizione

$$u_n''(t) = c(-\omega_0^2 n^2)\, u_n(t) + f_n(t)$$ ← eq. ordinaria di II° ordine

Se per esempio prendo $f = 0$ ho l'eq.

$$\begin{cases} u_n'' + \omega_0^2 n^2 u_n = 0 \\ u_n(0) = \qquad u_n'(0) = \end{cases}$$

. si ricavano dalla u_0 e v_0 usando gli sviluppi di F. di u_0 e v_0

Si può andare avanti e trovare u_n s_n . . . NON APPROFONDISCO.

Si può poi mettere dentro una f non nulla e studiare le proprietà della soluzione u CHE E' NOTA COME UNA SERIE