Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 27/03/2025

"DIGRESSIONE" $A \subset \mathbb{R}^N$

$\mathcal{B}(A) = \{$ funzione $f : A \to \mathbb{R}$, f limitata $\}$

$\mathcal{C}(A) = \{$ funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, f continua $\}$ nel caso A compatto

Allora $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)$ (Weierstrass)

$\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{B}(A)$ sono spazi vettoriali e $\|f\|_\infty$ è una norma in questi spazi, che induce una nozione di limite che corrisponde alla convergenza uniforme.

UN ALTRO SPAZIO DI FUNZIONI $L^2(A)$

$A \subset \mathbb{R}^N$, misurabile

Definisco $\mathcal{L}^2(A) = \{ f : A \to [-\infty, +\infty]$, misurabile t.c. $\int_A |f|^2 dx < +\infty \}$

$\left(\mathcal{L}^p(A) = \{ \quad " \quad " \quad " \quad \int |f|^p dx < +\infty \} \right)$

- Se $f \in \mathcal{L}^2(A)$ posso dire che f è "a quadrato sommabile" o "a energia finita" $\leftarrow \mathcal{E}(f) = \int_A |f|^2$ si può chiamare energia di f.
- Se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ definisco

$$\langle f, g \rangle := \int_A f g \, dx$$

Osservo che $\langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$ (se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$), perché

$$\int_A |fg|\,dx \le \int_A \frac{|f|^2+|g|^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_A |f|^2 dx + \frac{1}{2}\int_A |g|^2 dx < +\infty$$

$\Rightarrow |fg|$ è integrabile $\iff$ fg è integrabile.

Noto che $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ è bilineare (facile da verificare) ed è simmetrica $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

Viene spontaneo dire che $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_A fg$ è un prodotto scalare. MANCA UNA PROPRIETÀ

- $\langle f,f\rangle \ge 0$ (è vero) $\underbrace{\langle f,f\rangle = 0 \iff f=0}_{\text{PROBLEMA}}$

$\rightarrow \int_A f^2 dx = 0 \iff f^2(x) = 0$ per quasi ogni x (NON $\forall x$)
($f^2 \ge 0$!!)

SERVE UN TRUCCO MATEMATICO Introduco una "relazione di equivalenza" in $\mathcal{L}^2(A)$: dico che $f \simeq g$ se e solo se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x.

CON QUESTA RELAZIONE si considerano

- le classi di equivalenza $[f] = \{g : f \simeq g\} = \{g : f = g \text{ q.o.}\}$
- Definisco $L^2(A) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^2(A)\}$ $\left(=: \mathcal{L}^2/\simeq\right)$

(ANALOGIA $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ dove
$(n,m) \simeq (n_1,m_1)$ se e solo se $n m_1 = n_1 m$

Dunque $(1,1) \simeq (2,2)$ $(1,2) \simeq (3,6)$ e così via

"MORALMENTE" $L^2(A)$ = le funzioni a quadrato sommabile dove funzioni quasi sempre uguali si considerano uguali

Se faccio così, vedo che $\langle f,g\rangle = \langle f_1,g_1\rangle$

se $f \simeq f_1$ e $g \simeq g_1$ e quindi $\langle f, g \rangle$ è ben definito su $L^2(A)$

- DUNQUE IN $L^2(A)$ è ben definito il prodotto scalare

$$\underset{\uparrow}{\langle f, g \rangle} := \int_A f(x)\, g(x)\, dx \quad (\leftarrow \text{non dipende dal "rappresentante"})$$

A RIGORE $\langle [f], [g] \rangle$, ma abbandoniamo questo notazione

- $L^2(A)$ è uno spazio vettoriale dotato della norma

$$\| f \|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_A f^2(x)\, dx} \quad (\text{NORMA } L^2)$$

Alla norma L^2 è associata una nozione di limite (di convergenza)

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \quad \text{se e solo se} \quad \| f_n - f \|_2 \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

"convergenza L^2". Questa nozione è ben distinta dalla convergenza uniforme — se $m(A) < +\infty$ è più debole della conv. unif

$\rightarrow$ se $|A| < +\infty$, $f_n \rightarrow f$ unif $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f$ (qui f, f_n devono essere limitate)

QUESTO SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA

costante in x

se $f \in \mathcal{B}(A)$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{mis}(A)}}{|A|} < +\infty$ $\Rightarrow$ $\| f \|_2 = \sqrt{\int_A f^2(x)\, dx} \leq \sqrt{\int_A \| f \|_\infty^2 dx} = \sqrt{|A|} \cdot \| f \|_\infty$

$$\left(|f(x)| \leq \sup_A |f| = \| f \|_\infty \right)$$

$$\| f \|_2 \leq \sqrt{|A|}\; \| f \|_\infty$$

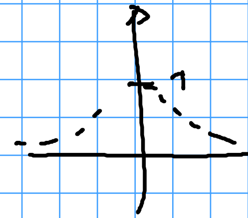
e quindi $\| f_n - f \|_2 \leq \sqrt{|A|}\; \| f_n - f \|_\infty$ da cui segue

$$\underset{(\text{UNIF.})}{f_n \xrightarrow{\infty} f} \Rightarrow f_n \xrightarrow{2} f$$

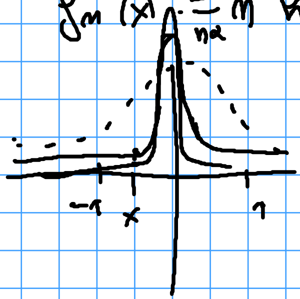
CONV. UNIF. $\Rightarrow$ CONV. L^2 ("UNIF $\geq L^2$")

IL VICEVERSA NON VALE

Per esempio. $A=[-1,1]$ $\qquad h(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$



$f_n(x) := n^\alpha h(nx)$ $\qquad$ ($0<\alpha<2$, poi lo decido meglio)



($f_n(0)=n^\alpha \to +\infty$ se $n\to\infty$)

$$\underset{x\neq 0}{f_n(x)} = \frac{n^\alpha}{1+n^2x^2} \to 0 \quad \text{perché } \alpha<2$$

Calcolo $\quad \|f_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1} f_n(x)^2\,dx = n^{2\alpha}\int_{-1}^{1} h(nx)^2\,dx$

cambio di variabile $y=nx \iff dy=n\,dx$, $dx=\frac{1}{n}\,dy$ $\to$

$$\|f_n\|_2^2 = n^{2\alpha-1}\int_{-n}^{n} h(y)^2\,dy \quad \Big| \text{ NOTO CHE } \int_{-n}^{n} h(y)^2\,dy \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^2} < +\infty$$

Scelgo α in modo che $\alpha>0$ $\quad 2\alpha-1<0$ $\quad$ cioè

$0<\alpha<\frac{1}{2}$ — PER ES. $\alpha=\frac{1}{4}$. Allora

$\|f_n\|_2^2 \longrightarrow 0$ $\quad$ (perché $\int_{-n}^{n} h(y)^2 \to \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)^2 < +\infty$ e $n^{2\alpha-1}\to 0$)

DUNQUE $f_n \to 0$ in L^2, ma $\|f_n\|_\infty = n^\alpha \to +\infty$

Nota. $\quad f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ +\infty & \text{se } x=0 \end{cases}$

OSS. Si può dimostrare che tutti questi spazi $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e anche $L^2(A)$ sono COMPLETI (le succ. di Cauchy hanno limite)
DA QUESTO segue che

- Se f_n è una successione in X (X è uno di questi: $\mathcal{B}(A)$ / $\mathcal{C}(A)$ / $L^2(A)$)
e se $\sum_{1}^{\infty}\|f_n\|_X < +\infty \Rightarrow$ la serie delle f_n converge in X

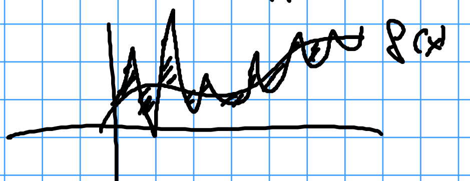
$\exists\, f\in X$ t.c. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k = f \iff \lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_X = 0$

Se $X = \mathcal{C}(A)$, A compatto quello scritto sopra è il criterio di conv. totale. Nel caso L^2 ho: $f_n \in L^2(A)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \Rightarrow \exists\, f \in L^2(A)$ t.c.

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\Big\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{cioè} \quad \sqrt{\int_A \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}_{S_n(x)} - f(x)\Big|^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

c'è un'approssimazione di tipo integrale



(L'area del quadrat. della differenza deve tendere a zero - c'è un quadrato)

A COSA SERVE QUESTO SPAZIO L^2 ??

Vedremo che le serie di Fourier "va d'accordo" con L^2 (meglio che con le funzioni continue)

PENSIAMO AL CASO COMPLESSO (più facile da scrivere - in maniera simile si tratta il caso reale)

ATTENZIONE se $g, f : A \to \mathbb{C}$ allora il prodotto scalare si definisce

$$\langle f, g \rangle := \int_A f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad (\in \mathbb{C})$$

e quindi

$$\|f\|_2^2 = \int_A f(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_A \underbrace{|f(x)|}_{\text{modulo complesso}}^2 dx$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALE (semplice!) $\quad T > 0 \quad \omega := \frac{2\pi}{T}$

si chiamano e_n le funzioni $e_n(t) := e^{in\omega t}$

$e_n \in L^2([0,T])$ (perché sono limitate: $|e^{in\omega t}| = 1 \ \forall t$)

Inoltre $\overline{e_n} = e_{-n}$ $(= e^{-in\omega t})$. Quindi

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T \end{cases}$$

Dunque le funzioni e_n ($n \in \mathbb{Z}$) sono "ortogonali" in $L^2([0,T])$ e hanno tutte norma L^2 pari a $\sqrt{T}$

(se prendessi $\hat{e}_n := \frac{e_n}{\sqrt{T}}$ sarebbero ortonormali)

POSSO PENSARE AGLI e_n come "una base" ortogonale in $L^2([0,T])$

(vediamo i dettagli ora)

Prendiamo f in $L^2(0,T)$ (che poi si può pensare su tutto $\mathbb{R}$ estesa per periodicità).

VORREI SCRIVERE $\quad f \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n \quad$ c_n i coeff di F.

CIOÈ DIRE CHE $\quad \left\| f - \sum_{n=-k}^{k} c_k e_k \right\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

- Dato $n \in \mathbb{N}$ definiamo X_n = spazio generato da

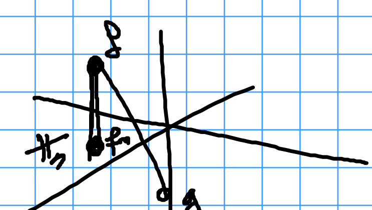
$$e_{-n} \dots e_0 \dots e_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k \quad \lambda_k \in \mathbb{C},\ k = -n \dots n \right\}$$

X_n è un sottospazio di dimensione $2n+1$ (ortogonali $\Rightarrow$ lin. indip.)

- Data una arbitraria f in $L^2([0,T])$ cerco la "proiezione" di f su X_n, cioè l'elemento $f_n \in X_n$ tale che

$$\|f - f_n\|_2 \leq \|f - g\|_2 \qquad \forall g \in X_n$$

f_n è il punto di X_n che ha minima distanza da f



VOGLIO VEDERE SE f_n esiste e come è fatto

Diamo per buono che f_n esiste (si deve usare Weierstrass generalizzato..)

Vediamo come è fatto f_n: MOSTRO CHE $f - f_n$ è ortogonale a g $\forall g \in X_n$. IO SO CHE

$$\| f - f_n \|^2 \leq \| f - g \|^2 \qquad \forall g \in X_n$$ f_n è di minima norma

$$\| f - f_n + f_n - g \|^2 = \| f - f_n \|^2 + 2 \langle f - f_n , f_n - g \rangle + \| f_n - g \|^2$$

Quindi $\quad 0 \leq 2 \langle f_n - f , f_n - g \rangle + \| f_n - g \|^2 \qquad \forall g \in X_n$

$$(*) \qquad 0 \leq 2 \langle f_n - f , h \rangle + \| h \|^2 \qquad \forall h \in X_n$$

Data $h \in X_n$ e $t > 0$ metto th al posto di h nella ultima disuguaglianza

$$0 \leq 2 \langle f_n - f , th \rangle + \| th \|^2 \qquad \forall h \in X_n \ \forall t > 0$$

$$0 \leq 2\cancel{t} \langle f_n - f , h \rangle + t^{\cancel{2}} \| h \|^2 \qquad \forall h \in X_n , \forall t > 0$$

$$0 \leq 2 \langle f_n - f , h \rangle + t \| h \|^2 \qquad \forall h \in X_n \ \forall t > 0$$

se mando $t \to 0^+$ trovo $\quad 0 \leq 2 \langle f_n - f , h \rangle \qquad \forall h \in X_n$

$$0 \leq \langle f_n - f , h \rangle \qquad \forall h \in X_n$$

Ma $h \in X_n$ anche $-h \in X_n$ e quindi mettendo $-h$ al posto di h

$$0 \leq - \langle f_n - f , h \rangle \qquad \forall h$$

IN DEFINITIVA $\quad \boxed{\langle f_n - f , h \rangle = 0 \qquad \forall h \in X_n} \quad (\star)$

DUNQUE $f_n - f$ è ortogonale a X_n.

∘ So anche che $f_n \in X_n$ cioè $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k$

Allora, se prendo $m = -n \dots n$, metto $h = e_m$ in ✪

$$0 = \langle f_n - f, e_m \rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k - f, e_m \right\rangle =$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle e_k, e_m \rangle}_{\substack{\text{TUTTI NULLI} \\ \text{TRANNE } \langle e_m, e_m \rangle = 1}} - \langle f, e_m \rangle = \lambda_m T - \langle f, e_m \rangle$$

DUNQUE TROVO $\lambda_m = \frac{1}{T} \langle f, e_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-im\omega t}.$

cioè $\lambda_m = c_m$ = coeff di Fourier m-esimo.

DUNQUE $f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \qquad c_k = \frac{1}{T} \langle f, e_k \rangle$

Calcolo la distanza tra f_n ed f ... (Tutte le norme sono L^2)

$$\| f_n - f \|^2 = \left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k - f \right\|_2^2 =$$

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 - 2 \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, f \right\rangle + \| f \|^2 =$$

$$\sum_{h,k=-n}^{n} c_k \overline{c_h} \underbrace{\langle e_k, e_h \rangle}_{\substack{0 \text{ se } k \neq h \\ T \text{ se } k = h}} - 2 \sum_{k=-n}^{n} c_k \langle e_k, f \rangle + \| f \|^2$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k}\, T - 2 \sum c_k \underbrace{\langle f, e_k \rangle}_{\overline{c_k}\, T}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 T - 2 \sum |c_k|^2 T + \| f \|^2$$

$$\Rightarrow \| f - f_n \|^2 = \| f \|^2 - T \sum |c_k|^2 \qquad \text{oppure}$$

$$\| f \|^2 = T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \| f - f_n \|_2^2 \qquad (✪✪) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ne segue

Se $f \in L^2 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty$ $\left(\text{dove } c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt\right)$

INOLTRE SI HA

Vale l'uguaglianza di PARSEVAL

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

IN EFFETTI (NON LO DIMOSTRIAMO) $f_n \xrightarrow{L^2} f$

<u>Teorema</u> (a) Se $f \in L^2([0,T])$, se $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ik\omega t}$

ALLORA $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Inoltre

(PARSEVAL) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\|f\|_2^2$$

$$\cdot T = \|e_n\|^2 \qquad |c_n|^2 T = \|c_n e_n\|^2$$

(b) (VICEVERSA)

Se $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una successione in $\mathbb{C}$ tale che

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, allora esiste $f \in L^2$ tale che

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \xrightarrow{L^2} f \qquad \left(f \underset{L^2}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n \right)$$

e si ha $c_n = \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle \Rightarrow \|f\|_2^2 = T\sum |c_n|^2$

C'È UNA PERFETTA CORRISPONDENZA TRA

$f \in L^2$ e $(c_n) \in \ell^2$ (cioè $\sum |c_n|^2 < +\infty$)

$$\int_0^T |f(t)|^2 \, dt < +\infty \qquad e \qquad \sum |c_n|^2 < +\infty$$

Per capirci qualcosa proviamo a rifare il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \qquad \text{quando } f \in L^2$$

C'è una nozione di soluzione "debole" che non è di classe C^2

MA È MOLTO RAGIONEVOLE!