Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49 26/03/2025

$$(P) \begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

$L > 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ assegnati

Suppongo che $f = \sum_1^\infty f_n s_n$ dove $s_n(x) = \sin(n \omega_0 x)$

$\omega_0 = \frac{\pi}{L}$

Cerco $y = \sum_1^\infty y_n s_n$

Ho visto che deve verificarsi la condizione

$$(c) \qquad -n^2 \omega_0^2 y_n + \lambda y_n = f_n \qquad \forall n \geq 1$$

I° caso ("NO RISONANZA") $\forall n$ $\lambda \neq n^2 \omega_0^2 \iff \lambda \neq \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ $\forall n$

posso ricavare y_n (dalla (c)) $\Rightarrow$ $\boxed{y_n = \dfrac{f_n}{\lambda - n^2 \omega_0^2} \quad \forall n.}$

FINO A QUI HO DELLE CONDIZIONI NECESSARIE. VEDIAMO

$$y(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{\lambda - n^2 \omega_0^2} \sin(n \omega_0 x)$$

effettivamente risolve (P)

Per questo devo fare delle ipotesi su f!

SUPPONGO che $\sum_1^\infty |f_n| < +\infty$ (f deve quindi essere continua)

$$\Rightarrow \quad n^2 |y_n| = |f_n| \left| \frac{n^2}{\lambda - n^2 \omega_0^2} \right| \leq K |f_n|$$

per un opportuno $K > 0$

perché $\left|\dfrac{n^2}{\lambda - n^2\omega_0^2}\right| \to \dfrac{1}{\omega_0^2} \in \mathbb{R}$ se $n \to \infty$ (limite finito $\Rightarrow$ limitato per le successioni)

Dunque $\displaystyle\sum_1^\infty n^2 |y_n| < k \sum_1^\infty |f_n| < +\infty \Longrightarrow$

$y = \sum y_n s_n$ è di classe C^2 e posso derivare due volte sotto il segno di serie $\Rightarrow$

$$y'' = \sum_1^\infty y_n s_n'' = \sum y_n(-\omega_0^2 n^2) s_n$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \lambda y = \sum_1^\infty \underbrace{(\lambda - \omega_0^2 n^2) y_n}_{f_n \text{ per come è definito } y_n} s_n = \sum f_n s_n = f$$

DUNQUE $y'' + \lambda y = f$ in $[0, L]$

· Vediamo che vale la condizione al bordo. $y(0) = y(L) = 0$

Sempre per quanto visto sopra ho $\sum y_n s_n$ converge unif. a y (per questo basta $\sum_1^\infty |y| < +\infty$) $\Rightarrow$

$$y(0) = \sum_1^\infty y_n \underbrace{s_n(0)}_{=0} = 0 \quad , \quad y(L) = \sum_1^\infty y_n \underbrace{s_n(L)}_{=0} = 0$$

DUNQUE IN QUESTO CASO (con queste ipotesi su λ, L e su f)

$$\boxed{\forall f \ (\text{con } \textstyle\sum |f_n| < +\infty) \quad \exists!\ y \text{ sol. di } (P)}$$

(y è di classe C^2 e verifica l'equazione $\forall$ per $\forall$)

II° caso $\exists\ \bar{m}$ tale che $\lambda = \dfrac{\bar{m}^2 \pi^2}{L^2} = \bar{m}^2 \omega_0^2$ ("RISONANZA")

Allora $(C) \Rightarrow 0 \cdot y_{\bar{m}} = f_{\bar{m}}$

Dunque

(a) se $f_{\bar{m}} \neq 0$ NON C'È SOLUZIONE

(b) se $f_{\bar{n}} = 0$ la (C) è verificata qualunque sia $y_{\bar{n}}$

In questo secondo caso, se suppongo come prima,

$f = \sum_1^{\infty} f_n S_n$ e $\sum_1^{\infty} |f_n| < +\infty$ posso definire

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{f_n}{\lambda - n^2\omega_0^2} & \text{se } n \neq \bar{n} \\ \text{arbitrariamente} & \text{se } n = \bar{n} \end{cases}$$

e vedo (ragionando come prima) che $y = \sum_1^{\infty} y_n S_n$ è di classe C^2 e verifico (P).

DUNQUE IN QUESTO CASO HO UN'ALTERNATIVA

(a) se $f_{\bar{n}} \neq 0$ non esiste soluzione

(b) se $f_{\bar{n}} = 0$ ho infinite soluzioni della forma

$$y = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \bar{n}}}^{\infty} y_n S_n + \mu S_{\bar{n}} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \bar{n}}}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - n^2\omega_0^2} S_n + \mu S_{\bar{n}}$$

~ ho una "retta di soluzioni" ← UNO SPAZIO UNIDIMENSIONALE DI SOLUZIONI

SIMILE AL SISTEMA LIN. $Ax = B$

- Se $\det A \neq 0$ $\forall B \; \exists !$ la sol.
- Se $\det A = 0$ la sol esiste solo per certi B e in tal caso le soluzioni formano uno spazio lineare di dim > 0

IN MODO SIMILE POTREI TRATTARE

(P_1) $\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{su } [0,L] \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ cerco $y = \sum_{n=0}^{\infty} v_n c_n$

$c_n(x) = \cos(n\omega_0 x)$

Per trattare (P_1) mi serve lo sviluppo in coseni:

<u>PROP.</u> (1) Data $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti posso definire

$n \geq 1$ $\quad v_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) c_n(x)\,dx$ dove $c_n(x) = \cos(n\omega_0 x)$

$v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$ e $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$

e allora $f(x) \underset{\text{puntualmente}}{=} \sum_{0}^{\infty} v_n c_n(x)$

(2) Se (v_n) sono dati e se $\sum_0^{\infty} |v_n| < +\infty \Rightarrow$ posso definire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x)$$ e la convergenza è uniforme

($\Rightarrow f$ è continua). Se più in generale $\sum_0^{\infty} n^k |v_n| < +\infty$

$\Rightarrow f$ è di classe C^k, posso derivare sotto il segno di serie fino all'ordine k e la serie delle derivate (fino all'ordine k) conv. unif. a $f^{(k)}$! IN PARTICOLARE

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) = 0 \quad \text{se } k \text{ è dispari}$$

Inoltre, se $\sum |v_n| < +\infty$, allora $v_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) c_n(x)\,dx$ $n \geq 1$

$v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$

<u>IDEA</u> di dim. Data f, la estendo a $[-L, L]$ IN MODO

PARI $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$ e poi estendo $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$ periodico

Se faccio lo sviluppo di Fourier di $\tilde{f}$ trovo a_n e b_n MA $b_n = 0$ perché $\tilde{f}$ è pari
Dunque considero $\alpha_n = a_n$ e restringo $x \in [0, T]$ e trovo quello che volevo.

FUNZIONI A QUADRATO SOMMABILE (o a ENERGIA FINITA) e Serie di Fourier.

OSS. Abbiamo a suo tempo introdotto $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$ (considero $\forall f: A \to \mathbb{R}$), $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se non dico niente

$$\|f\|_\infty \in [0, +\infty]$$

Se mi restringo alle funzioni limitate $\|f\| \in [0, +\infty[$
In particolare questo è vero se A è un compatto (limitato e chiuso) e f è continua.

DEFINISCO

$$\mathcal{B}(A) = \{ f: A \to \mathbb{R},\ f \text{ limitata} \}$$

$$\left(C^0(A) =\right) \mathcal{C}(A) = \{ f: A \to \mathbb{R},\ f \text{ continua} \}$$

Allora $\mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ sono degli spazi vettoriali
(comb. lineari di limitate è ancora limitata,
comb. lineari di continue è continua)

SI PUÒ VEDERE che $\mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ hanno dimensione infinita

ALLORA $\|\cdot\|_\infty$ è effettivamente una __norma__ in $\mathcal{B}(A)$

$$\|f\|_\infty \geq 0 \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty, \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Dunque in $\mathcal{B}(A)$ c'è una nozione di limite: $f_n \to f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$ __QUESTA NOZIONE È LA CONV. UNIF.__

Nel caso di A compatto ovviamente $\|\ \|_\infty$ è una norma in $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)$. Inoltre $\mathcal{C}(A)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}(A)$ (se $f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $\Rightarrow f \in \mathcal{C}(A)$)

Questo discorso è "propedeutico" a considerare altri spazi di funzioni con altre norme. Considereremo

$$L^2(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} \; : \; \int_A |f|^2 dx < +\infty \right\}$$

(con qualche precisazione da fare)

e per tali funzioni $\|f\|_2 := \sqrt{\int_A |f|^2 dx}$

N.B. $f \in L^2(A)$ NON IMPLICA $f \in \mathcal{B}(A)$