Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 48 24/03/2025

ESERCIZI (DAI PRECEDENTI COMPITINI)

Dati $D = \{ x^2+y^2 \le 25 \;,\; x \ge -4 \} = \{ \underbrace{x^2+y^2-25}_{G(x,y)} \le 0 \,,\; \underbrace{-4-x}_{H(x,y)} \le 0 \}$

$f(x,y) = xy - x - y$

Voglio trovare: tutti i pti critici vincolati per f su D

Poi voglio $\max_D f$, $\min_D f$ (e i punti di max/min)

OSS. Noto che D è un dominio regolare a tratti (COND. NECESSARIA PER TUTTO QUELLO CHE SEGUE):

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; G(x,y) \le 0 \,,\; H(x,y) \le 0 \} \quad \text{dove}$$

$$G(x,y) = x^2+y^2-25 \,, \qquad H(x,y) = -4-x$$

Per avere D reg a tratti serve. (1) G, H sono C^1 OK

(2) (a) Se $G(P)=0 \Rightarrow \nabla G(P) \ne 0$

(b) Se $H(P)=0 \Rightarrow \nabla H(P) \ne 0$

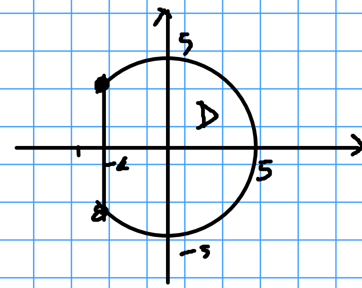
(c) Se $G(P)=H(P)=0 \Rightarrow \nabla G(P)$ e $\nabla H(P)$ lin. indip.

Infatti $\nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla H = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) se fosse $\nabla G(P)=0 \Rightarrow P=(0,0)$ ma allora $G(P) = -25 \ne 0$

(b) $\nabla H \ne 0$ sempre

(c) Quali sono i punti in cui $G = H = 0$!?



$$\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ x = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\nabla G(-4, \pm 3) = \begin{pmatrix} -8 \\ \pm 6 \end{pmatrix} \qquad \nabla H = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se fosse $\lambda \nabla G(-) + \mu \nabla H(-) = 0 \iff$

det $\neq 0$

$$\begin{cases} -8\lambda - \mu = 0 \\ \pm 6\lambda \quad 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ \pm 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda = \mu = 0$$

<u>OK</u> D è reg. e lotti

CERCO TUTTI I PTI CRITICI (VINCOLATI) per f su D.

CI SONO VARI CASI! NOTO CHE

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

(1) $\nabla f = 0 \quad G < 0 \quad H < 0$ (NESSUNA EGUAGLIANZA)

$y = 1 \quad x = 1 \qquad \boxed{(1,1) \in D}$ è pto critico (libero)

(2A) $\nabla f = \lambda \nabla G \quad G = 0 \quad H < 0$ (1 eguaglianza)

$$\begin{cases} y - 1 = 2\lambda x & \leftarrow \text{MOLTIPLICO PER } y \\ x - 1 = 2\lambda y & \leftarrow \text{MOLTIPLICO PER } x \\ x^2+y^2 = 25 \quad x > -4 \end{cases}$$

e sottraggo

$y^2 - y = 2\lambda xy$

$x^2 - x = 2\lambda xy$

$$\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x \iff y^2 - x^2 - (y-x) = 0$$

$$\iff (y-x)(y+x-1) = 0$$

DUE POSSIBILITÀ: $x = y \qquad y + x = 1$ TORNIAMO AL SISTEMA

$$\begin{cases} x = y \\ x^2+y^2 = 25, \quad x > -4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x^2 = \frac{25}{2}, \quad x > -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ x = \pm \frac{5}{\sqrt{2}} \quad x > -4 \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)}$ VA BENE ; $-\frac{5}{\sqrt{2}} > -4$?? $\Leftrightarrow$ $-5 > -4\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$

$\boxed{\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)}$ VA BENE $4\sqrt{2} > 5$ $\Leftrightarrow$ $16 \cdot 2 > 25$ SÌ

(2 B)

$\nabla f = \nabla H \qquad G < 0 \quad H = 0$

$$\begin{cases} y - 1 = -\lambda \\ x - 1 = 0 \\ x = -4 \qquad x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

(c) $\nabla f = \lambda \nabla G + \mu \nabla H \qquad G = H = 0$

La condizione $G = H = 0$ mi dà $(-4, \pm 3)$

La condizione $\nabla f = \lambda \nabla G + \mu \nabla H$ è sicuramente vera perché siamo in $\mathbb{R}^2$ e ∇G ∇H sono lin. indip.

$\Rightarrow$ TROVO $\boxed{(-4, -3)}$ $\boxed{(-4, 3)}$

IN TUTTO HO TROVATO CINQUE PUNTI

CALCOLO f in questi punti $\left(f(x,y) = xy - x - y \right)$

$f(1,1) = 1 - 1 - 1 = -1$

$f(-4,-3) = 12 + 4 + 3 = 19$

$f(-4,3) = -12 + 4 - 3 = -11$

$f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{2} - \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25}{2} - \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2} - 20}{2\sqrt{2}} > 0$

$f\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2} + 20}{2\sqrt{2}}$

VOGLIO IL VALORE PIÙ ALTO E IL VALORE PIÙ BASSO

MINIMO $= -11$ pto di minimo $(-4,3)$

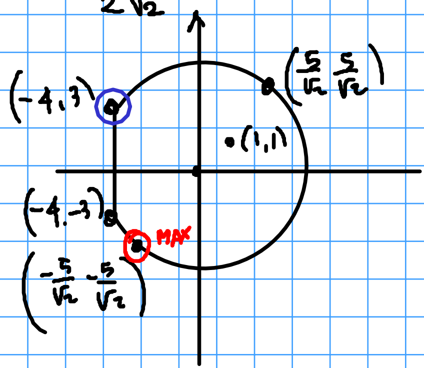
Per il max devo confrontare 19 e $\frac{25\sqrt{2}+20}{2\sqrt{2}}$

$$19 > \frac{25\sqrt{2}+20}{2\sqrt{2}} \iff 38\sqrt{2} > 25\sqrt{2}+20 \iff$$

$$(38-25)\sqrt{2} > 20 \qquad 13\sqrt{2} > 20 \qquad 13^2 \times 2 > 400 \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

$$13^2 > 200 \quad \text{NO}$$

$\Rightarrow$ MAX $= \frac{25\sqrt{2}+20}{2\sqrt{2}}$ e il pto di max è $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$



ESERCIZIO (UN INTEGRALE)

$$\iiint_D \frac{xy}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz \qquad D=\left\{x^2+y^2 \le 1,\ x\ge 0\ y \ge 0,\ x^2+4y^2 \le z\right\}$$

(posso definire $+\infty$ l'integrando dove il denominatore fa zero)

NOTO CHE $f(x,y,z) = \frac{xy}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}$ $(+\infty \ldots)$ è continua

eccetto che in $\{z=0\} \cup \{x^2+y^2=0\} = \underbrace{\{(x,y,0)\ x,y\in\mathbb{R}\}}_{\text{trascurabile}} \cup \underbrace{\{(0,0,z)\ z\in\mathbb{R}\}}_{\text{trascurabile}}$

(i piani e le rette sono trascurabili in $\mathbb{R}^3$) $\Rightarrow$ f è misurabile.

$\boxed{f \geq 0}$ su D $\Rightarrow$ L'INTEGRALE ESISTE (eventualmente $+\infty$)

e posso usare i teoremi di Tonelli / cambio di variabile

(se non avessi $f\geq 0$ dovrei prima dim. che f è integrabile, cioè $|f|$ ha integrale finito)

USO LE COORDINATE CILINDRICHE (POLARI IN (x,y), "z lo lascio")

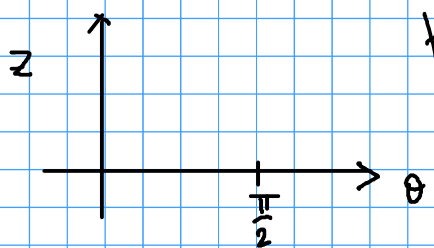
$$x=\rho\cos\theta \qquad y=\rho\sin\theta \qquad \text{"} z=z \text{"} \qquad dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$(\text{INT}) = \iiint_D \frac{xy}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{D}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{z^2\,\cancel{\rho}}\,\cancel{\rho}\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$\tilde{D} = \{(\rho,\theta,z):\ \underbrace{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}_{x\ge 0\ y\ge 0},\ \underbrace{0\le\rho\le 1}_{x^2+y^2\le 1},\ \underbrace{\rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)\le z}_{x^2+4y^2\le z}\}$$

$$(\text{INT}) = \int_0^1 \rho^2\left(\iint_{D_\rho} \frac{\cos\theta\sin\theta}{z^2}\,d\theta\,dz\right)d\rho =$$

$$D_\rho = \{0\le\theta\le\pi/2,\ \rho(\underbrace{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}_{1+3\sin^2\theta})\le z\}$$



$$= \int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left(\int_{\rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}^{+\infty}\frac{dz}{z^2}\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left[-\frac{1}{z}\right]_{\rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}^{+\infty}d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^1 \cancel{\rho^2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}\,d\theta\right)d\rho =$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\right)d\rho = \int_0^1\left(\int_0^1\frac{t}{1+3t^2}\,dt\right)d\rho$$

$$\sin\theta = t \qquad \cos\theta\,d\theta = dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{1+3t^2}\,dt \qquad \left(y=t^2 \quad dy=\frac{1}{2}t\,dt\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+3y}\,dy$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\ln(1+3y)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ln(4)$$ #

ESERCIZIO (DINI)

$$V := \{(x,y,z) : e^{xyz} = x-y+3z\}$$

(1) Trovare i punti $P=(x,y,z)$ per i quali NON si riesce ad applicare il Teorema del DINI in nessuna variabile (x,y,z)

HO $G(x,y,z) = e^{xyz} - x + y - 3z$ $\quad (V = \{G=0\})$

Per applicare il Dini rispetto a $z/x/y$ devo avere

$$\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0 \;/\; \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \;/\; \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

DUNQUE <u>NON POSSO APPLICARE</u> DINI nei PUNTI P tali che

$$\nabla G(P) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

CIOÈ
$$\nabla G(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\,e^{xyz} - 1 \\ xz\,e^{xyz} + 1 \\ xy\,e^{xyz} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad yz\,e^{xyz} = 1 = -xz\,e^{xyz} \iff z(x+y)=0$$

DUNQUE HO $z=0$ oppure $y=-x$

<u>$z=0$</u> IMPOSSIBILE (per la prima equazione)

DUNQUE DEVE ESSERE $y=-x$. RISCRIVO

$$xz\,e^{-x^2z} = -1$$
$$xz\,e^{-x^2z} = -1$$
$$-x^2\,e^{-x^2z} = 3 \quad \leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

NON C'È NESSUN PUNTO CON $\nabla G = 0$

(V è un vincolo regolare – di codimensione 1)

(2) Considero $P_0 = (0,2,1)$ (si vede che $P_0 \in V$)

$$\left(\begin{array}{l} e^{xyz} = x - y + 3z \\ 1 = 0 - 2 + 3 \quad \underline{\text{sì}} \end{array} \right)$$

verifichiamo che vicino a P_0 esiste $h(x,y)$ tale che

$$V = \{ (x, y, h(x,y)) \quad (x,y) \text{ vicino a } (0,2)$$

PER QUESTO SERVE CHE $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0$ cioè

$$\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = \underset{x=0\ y=2\ ,z=1}{xye^{xyz} + 3} \neq 0 \iff 3 \neq 0 \quad \underline{\underline{\text{sì}}}$$

(3) Calcolare $\nabla h(0,2)$. Per il Dini si ha:

$$J_h(0,2) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial (xy)}(0,2,1)}{\frac{\partial G}{\partial z}(0,2,1)} = -\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial z}(0,2,1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(0,2,1) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(0,2,1) \end{pmatrix}^t$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \iff \nabla h(0,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = yz\, e^{xyz} + 1 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = xz\, e^{xyz} - 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) = 2 + 1 = 3 \qquad \frac{\partial G}{\partial y}(P_0) = -1$$

Salvo errori...

<u>ESERCIZIO</u> (TEOR. DI INV. LOCALE) Considero $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi(x,y,z) := \begin{pmatrix} xyz \\ \sin(xz-1) \\ e^{yz+1} \end{pmatrix}$$

Considero $P_0 = (1,-1,1)$ e $Q_0 = \Phi(P_0) = (-1, 0, 1)$

(a) Calcolare $J_{\Phi^{-1}}(Q_0)$ (diamo per buono che Φ^{-1} esiste vicino a Q_0)

Per il teorema di inv. locale se $J_\phi(P_0)$ è invertibile $\Rightarrow$ ϕ^{-1} esiste vicino a Q_0 e $J_{\phi^{-1}}(Q_0) = J_\phi(P_0)^{-1}$

$$J_\phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ z\cos(xz-1) & 0 & x\cos(xz-1) \\ 0 & z e^{yz+1} & y e^{yz+1} \end{bmatrix} \qquad P_0 = (1,-1,1)$$

$$M = J_\phi(P_0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

devo calcolare $J_\phi(P_0)^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \left(\text{cofattori}(M) \right)^t$

$$\det M = (-1) \underbrace{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=-1} - (1) \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=0} = 1$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ devo fare la trasposta

$$J_{\phi^{-1}}(Q_0) = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

(b) Considero $f(Q) := \| \phi^{-1}(Q) \|^2$. Voglio $\nabla f(Q_0)$

È una questione di calcolo della derivata della funzione composta

$$f(Q) = \psi(\phi^{-1}(Q)) \quad \text{dove} \quad \psi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$\left(= \|(x,y,z)\|^2\right)$. Dunque $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e

$$J_\psi = (2x, 2y, 2z)$$

Per il teorema sulla derivata della composizione

$$J_g(Q) = J_\psi(\phi^{-1}(Q))\, J_{\phi^{-1}}(Q)$$

$$J_g(Q_0) = J_\psi(\underbrace{\phi^{-1}(Q_0)}_{P_0})\, J_{\phi^{-1}}(Q_0) = J_\psi(P_0)\, J_{\phi^{-1}}(Q_0)$$

Se passo al gradiente (devo fare la trasposta)

$$\nabla g(Q_0) = \left(J_\psi(P_0)\, J_{\phi^{-1}}(Q_0) \right)^t = J_{\phi^{-1}}(Q_0)^t\, J_\psi(P_0) = J_{\phi^{-1}}(Q_0) \nabla\psi(Q_0)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J_{\phi^{-1}}(Q_0)^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\nabla\psi(P_0)} = \begin{bmatrix} -2-2+2 \\ 0-2+2 \\ 2+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\frac{\partial h}{\partial x}(Q_0) = -2 \quad \frac{\partial h}{\partial y}(Q_0) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial z}(Q_0) = 0$

(due errori nel calcolo di $(J_\phi)^{-1}$ ...