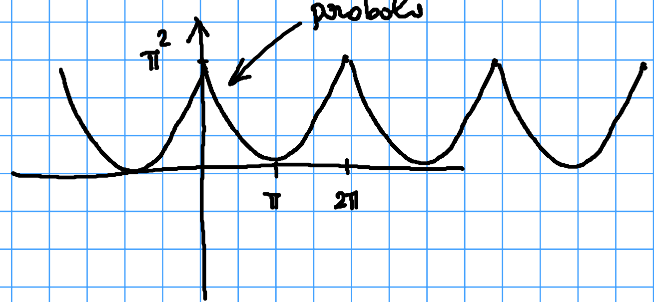
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 47   20/03/2025

Altro esempio



Tra 0 e 2π $\quad f(x) = x(x-2\pi) + \pi^2 \quad \left(f(\pi) = \pi(\pi-2\pi) + \pi^2 = -\pi^2 + \pi^2 = 0 \right)$

e poi "replicata" in modo da essere 2π-periodica

$T = 2\pi \qquad \omega = 1$

- f è regolare a tratti ed è anche continua (f non è C^1)
- Troviamo lo sviluppo di f (secondo Fourier)

N.B. f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0 \quad \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x(x-2\pi)+\pi^2\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi^2 x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(2\pi)^3}{3} - \pi(2\pi)^2 + \pi^2 2\pi\right) =$$

$$\frac{4\pi^2}{3} - 2\pi^2 + \pi^2 = \frac{4\pi^2 - 3\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$\pi^2\int_0^{2\pi}\cos(n\pi x)\,dx = 0$

$$n \geq 1 \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(x(x-2\pi) + \cancel{\pi^2}\right)\cos(nx)\,dx =$$

(IL TERMINE COSTANTE INFLUENZA SOLO a_0

INTEGRO PER PARTI

$$= \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[x(x-2\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}(2x-2\pi)\sin(nx)\,dx =$$

$$- \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2(x-\pi)(-\cos(nx))}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos(nx)\,dx}_{=0} =$$

$$\frac{1}{n^2\pi}\left(2\pi\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\cos(n2\pi)} + 2\pi\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\cos(n\cdot 0)}\right) = \frac{4}{n^2}$$

SALVO ERRORI HO

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nt)$$

N.B. La convergenza è uniforme perché $\sum |a_n| = \sum \frac{4}{n^2} < +\infty$
INVECE $\sum n|a_n| = +\infty$ (torna con il fatto che f non è C^1 !!)

Proviamo a fare lo sviluppo complesso

$$c_0 = a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad \text{(è lo stesso calcolo sopra)}$$

$$\text{se } n \neq 0 \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi}}_{\substack{=0 \text{ perché se} \\ \text{metto } t=0,\ t=2\pi \text{ trovo} \\ \text{lo stesso valore}}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\left(e^{-int} = 1 \ \forall n \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i^2n^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt}_{=0 \text{ perché } f''=2}.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n^2}\left(\overset{2\pi}{f'(2\pi)} - \overset{(-2\pi)}{f'(0)}\right) = \qquad \left(f'(x) = 2(x-\pi) \right)$$

$$= \frac{4\pi}{2\pi}\,\frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$$ (torna perché $a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n$ se $n \neq 1$)

DUNQUE

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nt)$$

$$\left(+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{n^2} e^{int} \right)$$

- SE METTO $t=0$ trovo

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \iff \frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

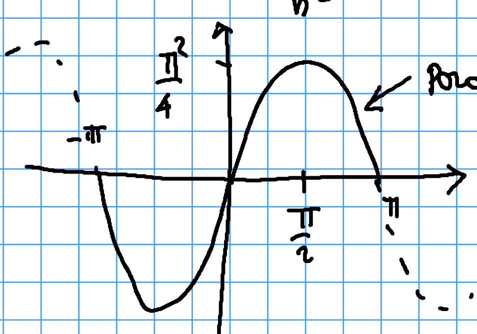
$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- SE METTO $t=\pi$ trovo

$$0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\overbrace{(-1)^n}^{\cos(n\pi)}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \left(= \underbrace{-1+\frac{1}{2}}_{<0}\,\underbrace{-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{<0}\,\dots \right)$$

CERCHIAMO UN ESEMPIO IN CUI i coeff. sono più sommabili rispetto a $\frac{1}{n^2}$. Cerco di "incollare parabole" in modo C^1

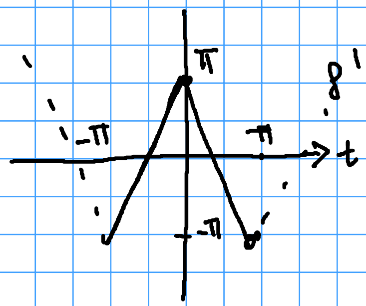


DEFINISCO $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & 0 \le t \le \pi \\ t(\pi + t) & -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

e periodizzata di periodo 2π

Vediamo come è fatto f'



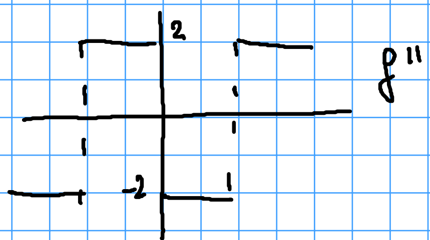
$$f'(t) = \begin{cases} \pi - 2t & 0 \le t \le \pi \\ \pi + 2t & -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

$$\pi - 2|t|$$

f è C^1 !!

INVECE f'' NON esiste in $t = k\pi$:

$$f''(t) = \begin{cases} -2 & 0 < t < \pi \\ 2 & -\pi < t < 0 \end{cases}$$



Calcolo i $\underline{c_n}$

- $c_0 = 0$ si vede dal grafico (per simmetria) $\underline{\text{la } f \text{ è dispari}}$

- Se $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \overset{\text{(per parti)}}{=} \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(t) \frac{e^{-int}}{-int} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{f(\pi) = f(-\pi) = 0} + \frac{1}{2\pi i n}\int_{0}^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \text{(per parti)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i n}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ perchè } f'(-\pi) = f'(\pi)\ (= -\pi)} + \frac{1}{2\pi i^2 n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\, e^{-int}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{0} 2 e^{-int}\, dt - \frac{1}{2\pi n^2}\int_{0}^{\pi} (-2)\, e^{-int}\, dt =$$

$$-\frac{1}{\pi n^2}\left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n^2}\left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$-\frac{i}{\pi n^3}\left(1-e^{-in\pi}\right)+\frac{i}{\pi n^2}\left(e^{-in\pi}-1\right) = \frac{2i}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$c_0 = 0 \qquad c_n = \frac{2i}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$ $\qquad$ (immaginari puri – dispari $\Updownarrow$ f è reale dispari)

$|c_n| \simeq \frac{1}{n^3} \Rightarrow f$ è C^1 e si può derivare sotto il segno di serie

perché $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n|c_n| < +\infty$

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari } (n = 2k) \\ \frac{-4i}{\pi n^3} & n = 2k+1, \text{ dispari} \end{cases}$$

Inoltre $\quad a_n = 0 \ \forall n \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n = \frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)^3}$$

Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}^{= \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k}}{(2k+1)^3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad \left(= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots\right)$$

Serie in "soli seni" / "soli coseni"

PRENDO $L > 0$ e prendo $f : [0, L] \to \mathbb{R}$

Mi chiedo se posso scrivere $\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_0 x)$

dove $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$ (??)

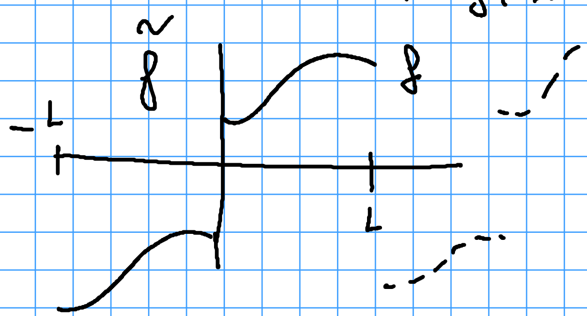
Noto che le funzioni $S_n(x) = \sin(n\omega_0 x)$ sono tutte nulle in $x=0$

e in $x = L$ $\left(\sin(n \omega_0 L) = \sin(n\pi) = 0 \right)$

Sto cercando di vedere f come una somma infinita di funzioni NULLE AGLI ESTREMI DI $[0, L]$

FACCIAMO COME SEGUE. Data f definita su $[0, L]$ la estendo su $[-L, 0]$ in modo DISPARI. Pongo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ 0 & x = -L, 0, L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$ (poco importante)



POI ESTENDO $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$-periodico

SVILUPPO $\tilde{f}$ secondo Fourier e NOTO CHE I COEFF a_n relativi a $\tilde{f}$ sono tutti nulli (dato che $\tilde{f}$ è dispari). DUNQUE

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n \omega x) \qquad \omega = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}L} = \omega_0$$

dove gli u_n (che sono i b_n) sono dati da $u_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin(n \omega_0 x)\, dx$

$$= \frac{1}{L} \, 2 \int_0^L \tilde{f}(x) \sin(n \omega_0 x)\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n \omega_0 x)\, dx$$

<u>DUNQUE</u> Se f è regolare e data su $[0, L]$ allora ho

$$\left(\begin{array}{c} f(x) \text{ se } f \text{ è} \\ \text{cont. in } x \end{array} = \right) \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n \omega_0 x)$$ (SERIE DI "SOLI SENI")

dove $u_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n \omega_0 x)\, dx \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L}$

Se in più so che

$$f \in C^1(0,L) \qquad f(0) = f(L) = 0$$

$\Rightarrow$ la convergenza della serie di soli seni è uniforme

<u>VICEVERSA</u> Sia data una successione (a_n) in $\mathbb{R}$. Considero la serie

$$\left(f(x) := \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n \omega_0 x) \qquad \left(\omega_0 = \frac{\pi}{L}\right)$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow$ la serie converge unif. Detta $f(x)$ la somma, si ha che f è continua e $f(0) = f(L) = 0$

PIÙ IN GENERALE, se $\sum n^k |a_n| < +\infty \Rightarrow f$ è C^k, si può derivare per serie, e si ha

$0 \le h \le k \qquad f^{(h)}(0) = f^{(h)}(L) = 0$ se h è pari.

<u>Per esempio</u> se prendo $\quad f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{n^5}$

scelto e $L = \pi$: dunque considero $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

In questo caso $a_n = \frac{1}{n^5} \quad (L = \pi \quad \omega_0 = 1)$ So che $\sum n^3 |a_n| < +\infty$

$\Rightarrow f$ è di classe C^3. Inoltre

$$f(0) = f(\pi) = 0 \qquad f''(0) = f''(\pi) = 0$$

e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5} \cos(nx) = \sum \frac{1}{n^4} \cos(nx)$$

$$f''(x) = -\sum \frac{1}{n^3} \sin(nx) \quad - \ - \ . \ .$$

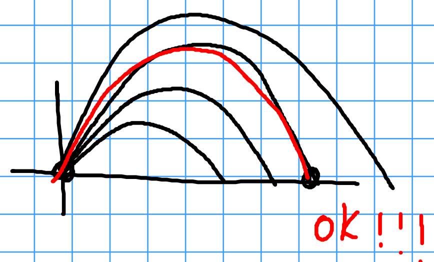
Proviamo a usare questi ultimi sviluppi in serie per risolvere un problema di flessione (UN PO' BANALE, ma significativo)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{su }]0, L[\\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

(L'incognita è la funzione y, λ è un parametro, f è una funzione data

HO DELLE "CONDIZIONI AGLI ESTREMI")

Potrei inserire una condizione $y'(0) = m$ e, facendo variare m, vedere se nel punto $x = L$ la y torna in zero



IDEA Cerco $y(x) = \sum u_n \underbrace{\sin(n\omega_0 x)}_{s_n(x)}$ $\quad \omega_0 = \frac{\pi}{L}$

(le funzioni s_n verificano automaticamente la proprietà $s_n(0) = s_n(L) = 0$)

ALLORA – se tutto torna –

$$y'(x) = \sum_1^\infty u_n \, n\omega_0 \cos(n\omega_0 x)$$

$$y''(x) = \sum_1^\infty -u_n (n\omega_0)^2 \sin(n\omega_0 x) = -\sum u_n (n\omega_0) s_n(x)$$

SE IMPONGO L'EQUAZIONE:

$$y'' + \lambda y = -\sum_1^\infty u_n (n\omega_0)^2 s_n + \lambda \sum_1^\infty u_n s_n = \sum_1^\infty (\lambda - n^2\omega_0^2) s_n$$

Supponiamo che il termine noto f si possa sviluppare in serie di seni: $\quad f(x) = \sum_1^\infty f_n s_n(x)$ $\quad$ ALLORA L'EQ. DIVENTA

$$\sum_{n=1}^\infty \left((\lambda - n^2\omega_0^2) u_n - f_n \right) s_n = 0 \quad \Leftarrow$$

$(\Rightarrow \ldots)$

$$(*) \quad \boxed{(\lambda - n^2\omega_0^2)\,u_n = g_n \qquad \forall n \geq 1}$$

Se $\lambda \leq 0$ posso ricavare $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda - n^2\omega_0^2}$

Se invece $\lambda > 0$ ci SONO DUE CASI

(1) $\lambda - n^2\omega_0^2 \neq 0$ $\forall n$ e allora faccio come prima e ricavo $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda - \omega_0^2 n^2}$

(2) c'è un intero $\bar{n}$ tale che $\omega_0^2 \bar{n}^2 = \lambda$ $\left(\lambda = \dfrac{\bar{n}^2}{\omega_0^2}\right)$

In questo caso posso trovare $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda - \omega_0^2 n^2}$ se $\underline{\underline{n \neq \bar{n}}}$

mentre, per $n = \bar{n}$, la $(*)$ IMPONE $g_{\bar{n}} = 0$

CONCLUSIONE (la dirò meglio la prossima volta)

- Se $\lambda \neq \left(\dfrac{n}{\omega_0}\right)^2$ $\forall n$ (in particolare $\lambda < 0$)

  $\Rightarrow \exists$ UNICA LA SOL. data da $y(x) = \sum u_n S_n(x)$

  dove $u_n = \dfrac{g_n}{\lambda - \omega_0^2 n^2}$

- Se $\lambda = \left(\dfrac{\bar{n}}{\omega_0}\right)^2$ la sol. non esiste a meno che $g_{\bar{n}} = 0$. Se $g_{\bar{n}} = 0$

la sol. non è unica perché il termine $u_{\bar{n}}$ si può scegliere in modo arbitrario.

CI TORNIAMO