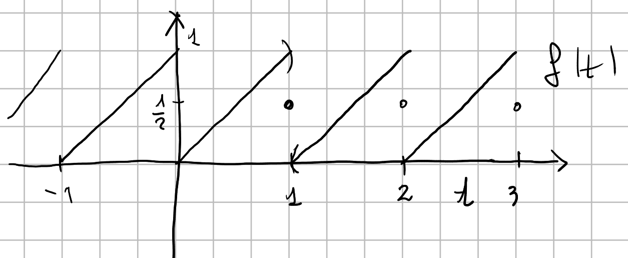
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 46 19/03/2025

ALTRI ESEMPI (Fourier)



(dente di sega) Su $[0\ 1]$ è definita ponendo

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1/2 & \text{se } t = 0,\ t = 1 \end{cases}$$

E PERIODICA DI PERIODO $T = 1$ su $\mathbb{R}$

(il fatto di definirla $1/2$ in 0 e 1 è "convenzionale" – lo sviluppo che ora facciamo sarebbe lo stesso qualunque valore mettessimo in quei due punti.

DUNQUE $T = 1 \Rightarrow \omega = 2\pi$. Dunque la serie sarà

$$f(t) \nearrow \sum_{1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n 2\pi t) + b_n \sin(n 2\pi t)\Big) + a_0$$

OPPURE

$$f(t) \searrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n 2\pi t}$$

Dato che f è regolare a tratti il teorema mi dice che entrambe le due serie scritte sopra convergono puntualmente a $f(t)$

OSS. NON CI PUÒ ESSERE CONV. UNIF. dato che f è discontinua in $t = KT$ $K \in \mathbb{Z}$ ATTENZIONE continua $\Rightarrow f(0) = f(1)$

CALCOLIAMO I COEFFICIENTI. Stavolta parto dai c_n

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \int_0^1 t\, e^{-in2\pi t}\, dt = \text{(per parti)}$$

anche se $f(0) = f(1) = 1/2$ l'integrale non cambia

SE $n \neq 0$

$$\left[\frac{t\, e^{-in2\pi t}}{-in2\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{in2\pi}\int_0^1 e^{-in2\pi t}\, dt =$$

$$\frac{i}{2\pi n}\left(\underbrace{e^{-2\pi n i}}_{1} - 0 \right) + \frac{1}{in2\pi}\left[\frac{e^{-in2\pi t}}{-in2\pi} \right]_0^1 = \frac{i}{2\pi n}$$

$1 - 1 = 0$

$$\left(k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{k2\pi i} = \underbrace{\cos(k2\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(k2\pi)}_{0} = 1 \right)$$

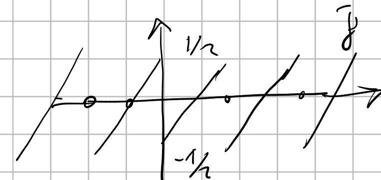
DUNQUE $c_n = \dfrac{i}{2\pi n}$ se $n \neq 0$

Se $n = 0$ $\quad c_0 = \displaystyle\int_0^1 t\, dt = \left[t^2/2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

OSS. Se considero $\tilde{f}(t) = f(t) - 1/2$ allora i coeff $\tilde{c}_n$ di $\tilde{f}$ sono

$$\tilde{c}_n = c_n = \frac{i}{2\pi n} \quad \text{se } n \neq 0$$

$$\tilde{c}_0 = 0$$



(se g = costante $\Rightarrow c_n = 0 \ \forall n$ tranne $n = 0$ $\quad c_0 =$ costante)

OSS. $|c_n| = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum |c_n| = +\infty$

IN EFFETTI NON POTEVA VENIRE $< +\infty$, se fosse stato finito $\Rightarrow$ conv. unif $\Rightarrow f$ continua (che è falso)

POSSO TROVARE a_n e b_n dalle formule

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \ \forall n \geq 1 \qquad b_n = -\frac{2}{2\pi n} = -\frac{1}{\pi n}$$

VERIFICA calcolo i b_n $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 2\int_0^1 t\sin(n 2\pi t)\,dt = (\text{per parti})$$

$$2\left[t\frac{\left(-\cos(n2\pi t)\right)}{n2\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{2n\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos(n2\pi t)\,dt}_{=0} = -\frac{1}{n\pi}$$

TORNA DUNQUE

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{2\pi n} e^{i2\pi n t} = \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi}\sin(n2\pi t)}\quad \forall t$$

(qui CONTA che $f(0) = f(1) = \ldots = f(k) = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$)

METTIAMO $t = 1/2$ nella formula: $f(1/2) = 1/2 \Rightarrow$ 1

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi)$$

DUNQUE LA SERIE $= 0$

(OVVIO!! $\sin(n\pi) = 0$)

METTIAMO $t = 1/4$:

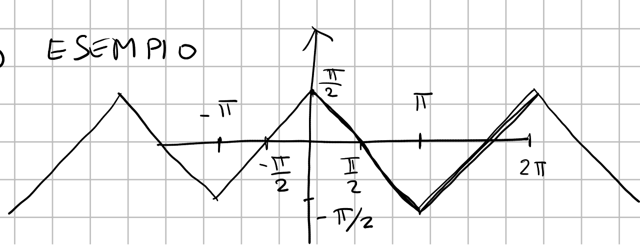
$$\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

NOTO CHE
$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}(-1)^k \iff \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \iff$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

ALTRO ESEMPIO (ONDA TRIANGOLARE)



$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

e poi 2π- PERIODICA

$T = 2\pi \qquad \omega = 1 \qquad\qquad f$ è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$ (c_n reali pari)

Calcoliamo gli a_n : (POSSO INTEGRARE SU $[-\pi,\pi]$ INVECE CHE SU $[0,2\pi]$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2} - |t|\,dt \overset{\text{(per parità)}}{=} \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}t - t^2/2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + 0 - 0\right) = 0 \quad !$$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \overset{\text{(parità)}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)$$

$\left(f(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ su } [0,\pi] \ !! \right)$ (per parti)

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0 \text{ a causa del } \sin(n\pi)=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt =$$

$(f' = -1 \text{ su }]0,\pi[\,)$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(-1)\sin(nt)\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}\frac{(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(-\cos(n\pi) + 1\right) = 2\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$n \geq 1 \qquad a_n = 2\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Stavolta $|a_n| \leq \frac{4}{\pi n^2} \leftarrow$ SUMMABILE $\Rightarrow$ CONV. UNIF.

(TORNA COL FATTO CHE f è continua)

$$\text{e dunque } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$$

<u>OSS.</u> Ho $\sum n|a_n| = +\infty$ (si vede perché $a_{2k+1} \simeq \frac{1}{2k+1}$)

NON POSSO DEDURRE f C^1 (E INFATTI f <u>NON</u> è C^1)

Dalla formula, se metto $A = 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$