Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45 17/03/2025

TORNIAMO ALLE SERIE TRIGONOMETRICHE

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt) \qquad + a_0$$

OPPURE

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t} \qquad \left(= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(e^{i\omega t}\right)^n \right)$$

caso limite della serie di potenze : $|e^{i\omega t}| = 1$

Vediamo qualche altra proprietà di queste serie. SUPPONIAMO CHE I COEFFICIENTI SIANO TALI PER CUI le serie convergono (VEDI LEZIONE SCORSA)

PROPRIETÀ

(a) f è pari $\iff b_n = 0 \quad \forall n$

(b) f è dispari $\iff a_n = 0 \quad \forall n$

(c) g pari $\iff c_{-n} = c_n$ (c_n pari rispetto a n)

(d) g dispari $\iff c_{-n} = -c_n$ (c_n dispari)

Dim. Nelle (a) e (b) è facile la parte $\Leftarrow$. Per l'altra bisogna usare le formule

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$$\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

+ osservazione che nelle formule sopra si può integrare tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ (perché gli integrandi sono T periodici)

(c) Se $c_n = c_{-n}$ si ha

$$f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overset{\overset{c_m}{\shortparallel}}{c_{-m}} e^{im\omega t} = \quad (m = -n \text{ come indice})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t} = f(t)$$

Ho DIM $\Leftarrow$. Viceversa se f è pari $\Rightarrow$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt =$$

(cambio di variabile $\tau = -t$) $= \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{-T/2} f(-\tau) e^{-in\omega\tau} (-1) d\tau =$ (f è pari)

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau = c_n$$

Per la (d) il ragionamento è simile.

(e) $\boxed{g \text{ è reale} \Leftrightarrow c_{-n} = \overline{c_n}}$ Infatti

Se g reale $\Leftrightarrow g(t) = \overline{g(t)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Allora

Suppongo g reale. So che $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$

$$\Rightarrow \overline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t) e^{-in\omega t}} dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{i\omega n t} dt = c_{-n}$$

Viceversa, se $\overline{c_n} = c_{-n}$ allora

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}\, \overline{e^{in\omega t}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} = (m = -n)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t} = f(t)$$

IN PARTICOLARE

g è reale pari $\Leftrightarrow$ c_n sono reali e pari $\Leftrightarrow$ $\overline{c_n} = c_n = c_{-n}$

g è reale dispari $\Leftrightarrow$ c_n sono immaginari puri dispari $\Leftrightarrow$ $\overline{c_n} = -c_n = c_{-n}$

LEGAME TRA f e g (forma complessa e forma reale)

Supponiamo che $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ con $c_n = \alpha_n + i\beta_n$.

e supponiamo anche che g sia reale $\Leftrightarrow$ $c_{-n} = \overline{c_n}$ cioè

$$\alpha_{-n} + i\beta_{-n} = \alpha_n - i\beta_n \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{-n} = \alpha_n,\ \beta_{-n} = -\beta_n}$$

In particolare $\beta_0 = 0$ (no info su α_0). Allora:

$$g(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)\big(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\big) +$$
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (\alpha_n + i\beta_n)\big(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\big) =$$

(uso $-n$ come indice nella seconda serie)

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)\big(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\big) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} + i\beta_{-n})\big(\cos(-n\omega t) + i\sin(-n\omega t)\big) =$$

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)\big(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\big) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n)\big(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\big) =$$

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha_n\cos(n\omega t) - \beta_n\sin(n\omega t) + i\alpha_n\sin(n\omega t) + i\beta_n\cos(n\omega t)\big)$$

si semplificano

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha_n\cos(n\omega t) - \beta_n\sin(n\omega t) - i\alpha_n\sin(n\omega t) - i\beta_n\cos(n\omega t)\big) =$$

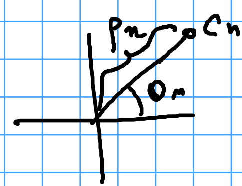
$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n\cos(n\omega t) - 2\beta_n\sin(n\omega t)$$

DUNQUE $g(t) = f(t)$ se $a_n = 2\alpha_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n$ e $b_n = -2\beta_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n$

CASO g reale.

Significato dei c_n in termini di "AMPIEZZA" e "FASE"

Sia $\quad g(t) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imωt}$ $\qquad$ Se scrivo $\quad c_n = \rho_m e^{i\theta_m}$



(forma polare: $\rho_n = |c_n| \geq 0$
$\theta_m = \mathrm{Arg}(c_n)$)

$$\Rightarrow \quad g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_m e^{i\theta_m} e^{imωt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_m e^{i(mωt+\theta_m)}$$

Se g è reale so anche $\quad \overline{c_m} = c_{-n} \quad$ e cioè

$\rho_{-m} = \rho_m \quad \theta_{-m} = -\theta_m \quad$ e dunque $\qquad (\theta_0 = 0)$

$$g(t) = \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m e^{i(mωt+\theta_n)} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{-n} e^{i(-mωt+\theta_{-n})} =$$

$$\rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m \left(e^{i(mωt+\theta_m)} + e^{-i(mωt+\theta_n)} \right) =$$

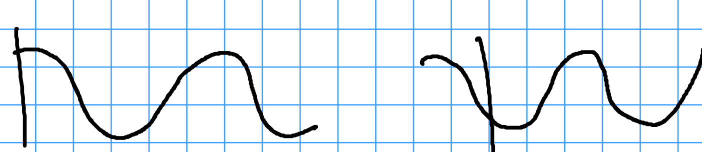
$$\rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m \, 2 \, \mathrm{Re}\left(e^{i(mωt+\theta_n)} \right) =$$

$$\rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2\rho_m \cos(mωt + \theta_n)$$

$2\rho_m$ = "AMPIEZZA" della m-esima armonica

θ_m = "FASE"

($\cos(x)$ e $\cos(x + \pi/2)$


)

FINO A QUI SIAMO PARTITI DAI COEFFICIENTI a_n, b_n o c_n e abbiamo esplorato le proprietà della $f(t)$ / $g(t)$ "generata" dalle rispettive serie.

FACCIAMO ORA IL DISCORSO OPPOSTO: partiamo da f.

<u>SUPPONIAMO</u> che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sia T-periodica.

Supponiamo anche che f sia misurabile e che $\int_0^T |f(t)|\,dt < +\infty$

(INTEGRABILE su $[0,T]$ $\Longleftrightarrow$ INTEGRABILE SU OGNI $[0,b] \subset \mathbb{R}$ a causa della periodicità)

Definiamo i <u>coefficienti di Fourier di f</u> : $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$a_n := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\,dt$$

se $n \geq 1$ mentre $a_0 := \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt$

OPPURE (CASO COMPLESSO) $c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\,dt$

<u>OSS.</u> Si ottiene lo stesso integrando da $-T/2$ e $T/2$ (f è T-periodica)

<u>DOMANDA</u> Se considero la serie trigonometrica fatta a partire da a_n, b_n (o dai c_n) posso dire che la loro somma (esiste ed) è uguale alla f di partenza

LA RISPOSTA NON È SEMPLICE. VEDIAMO DEI CASI NOTI (NO DIM.)

PER ES. NON È VERO NEL CASO DI f CONTINUA (CI SONO delle f continue per cui è falso che $f(t) = \sum a_n \cos(n\omega t) + b_n \ldots$ per ogni t

CASO IN CUI LE COSE TORNANO : $\boxed{f \text{ REGOLARE A TRATTI}}$

<u>Def.</u> Dico che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è regolare a tratti se esistono

$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_k \leq T$ tali che

f è C^1 su ogni $]t_i, t_{i+1}[$ e

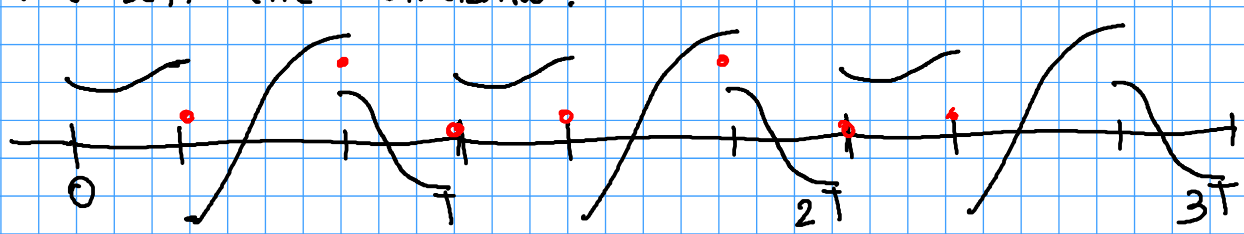
$$\sup_{t_i < t < t_{i+1}} |f'(t)| < +\infty \quad (f' \text{ è limitata in }]t_{i-1}, t_i[ )$$

(questa proprietà si estende per periodicità su ogni $[mT, (m+1)T]$)

DA QUESTA PROPRIETÀ SI PUÒ RICAVARE CHE in ogni t_i $(i = 0 \dots K)$ esistono

$$\left(f(t_i^+) \right) = \lim_{t \to t_i^+} f(t) \quad , \quad \lim_{t \to t_i^-} f(t) \quad \left(= f(t_i^-) \right)$$

MA NON È DETTO CHE COINCIDANO.



<u>TEOREMA</u> Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ la <u>serie di Fourier</u> associata ad f converge a $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \underbrace{\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}_{\text{MEDIA TRA LIMITE DX E LIMITE SX DI } f} \left(= \begin{matrix} f(t) \text{ se} \\ t \neq t_i \end{matrix} \right)$$

(a_n b_n i coeff di Fourier)

La serie di F. converge puntualmente alla f fuori dai punti di salto, alla media tra lim dx e lim sx nei pti di salto

<u>TEOREMA</u> Se f è di classe C^1 $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge uniformemente

DIM. NEL CASO f di classe C^2. Se so che f è di classe C^2. Vediamo il caso con i coeff. complessi c_n :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \text{(per parti)}$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{T} f(t)\, \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^T}_{\text{VIENE ZERO perché la } f \text{ è } T\text{-periodica e anche } e^{-in\omega t} \text{ lo è}} + \frac{1}{T\, in\omega}\int_0^T f'(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{T} f'(t)\, \frac{e^{-in\omega t}}{(-in\omega)^2}\right]_0^T}_{\text{ancora zero}} - \frac{1}{T\,(in\omega)^2}\int_0^T f''(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{\omega^2 T}\,\frac{1}{n^2}\int_0^T f''(t)\, e^{in\omega t} = c_n$$

Ma allora $|c_n| \le \frac{1}{T\omega^2}\,\frac{1}{n^2}\int_0^T |f''(t)|\, dt \le \frac{cost}{n^2}$

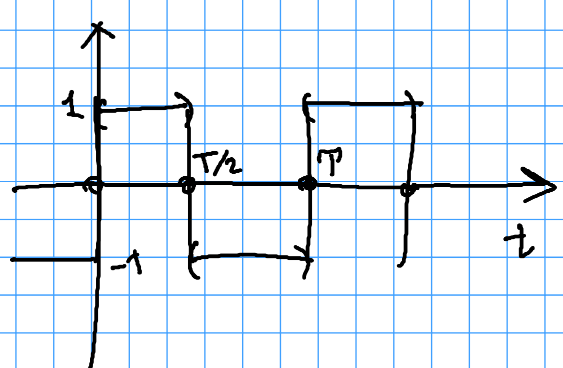
Ne segue $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \Rightarrow \sum c_n e^{in\omega t}$ converge uniformemente. Ma dal teorema prima so che converge unif. proprio a f.

HO USATO IL FATTO CHE $f \in C^2 \Rightarrow |c_n| \simeq \frac{1}{n^2}$

$\left(f \in C^k \Rightarrow |c_n| \simeq \frac{1}{n^k} \right)$

ESEMPI

ONDA QUADRA



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t = 0, \frac{T}{2}, T \\ -1 & \frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$

e poi periodicizzata di periodo T

f è regolare a tratti $\Rightarrow$ f è somma della sua serie di F.

(Ho messo $f(t) = 0$ nei punti di salto) CALCOLIAMO I COEFF. DI Fourier

NOTO CHE f è DISPARI $\Rightarrow a_n = 0$. Invece, se $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \underbrace{f(t)\sin(n\omega t)}_{\text{PARI}}\,dt =$$

$$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\,dt \qquad \left(f = 1 \text{ su }]0, T/2[\right)$$

$$= \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{4}{n\omega T}\left(-\cos(n\omega T/2) + 1\right) =$$

$$\frac{4}{n\,2\pi}\left(-\cos(n\pi) + 1\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\frac{1}{n} \qquad \left(\omega T = 2\pi\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} =$$ e quindi

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1))^n}{\pi n}\sin(n\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi n}\sin\left((2k+1)\omega t\right)$$

$(n = 2k+1)$

Per curiosità vediamo lo sviluppo complesso:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt =$$

$$-\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{-in\omega t}\,dt + \int_0^{T/2} e^{-in\omega t}\,dt =$$

$$-\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_{-T/2}^{0} + \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^{T/2} =$$

$$\frac{1}{in\omega T}\left(\left[e^{-in\omega t}\right]_{-T/2}^{0} - \left[e^{-in\omega t}\right]_0^{T/2}\right) =$$

$$\frac{1}{i m 2\pi}\left(1-\underbrace{e^{im\pi}-e^{-im\pi}}_{\text{eguali a } (-1)^n}+1\right)=\frac{1-(-1)^n}{i\, m\pi}$$

$$c_m = -\frac{(1-(-1)^n}{m\pi}\, i \qquad \left(c_n \text{ sono immaginari puri dispari}\right)$$

$$\left(b_m = -2\,\mathrm{Im}\, c_n \qquad \text{CONTROLLARE} \ldots\right)$$

Dalle eguaglianze:

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1))^n}{\pi m}\sin(m\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin((2k+1)\omega t)$$

$$(m = 2k+1)$$

se metto $t=\frac{T}{4}$ trovo

$$1 = f\left(\frac{T}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin\left(\overbrace{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{(-1)^k}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Ho TROVATO CHE $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$