Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44   12/03/2025

II° COMPITINO : LUNEDÌ 24/3   ORE 16.30   AULA F9 (S.T.)

Serie trigonometriche: $\left(f(t) =\right) \; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

$\omega > 0$, f è T-periodica dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$. $\left(\begin{array}{l} a_n, b_n \in \mathbb{R} \\ \text{assegnati} \end{array}\right)$

Di questa serie esiste la versione complessa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

$\left(\text{Ricordo che } e^z = e^{x+iy} = e^x \left(\underbrace{\cos(y) + i\sin(y)}_{e^{iy}}\right)\right)$

Nell'espressione sopra si intende

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

serie trigonometrica complessa

<u>Teorema</u>   Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e (contemporaneamente) $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$

allora la serie (S.T.) converge uniformemente su $\mathbb{R}$. DUNQUE f è continua (T-periodica). Inoltre si ha:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\,; \quad n \geq 1 \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Dim. Vedo che (S.T.) è TOTALMENTE CONVERGENTE (SU $\mathbb{R}$)

$$f_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq |a_n| + |b_n| \qquad \left(\text{perché } \begin{array}{l} |\sin(x)| \leq 1 \\ |\cos(x)| \leq 1 \end{array}\right)$$

Dunque se $\sum |a_n| + |b_n| < +\infty \Rightarrow$ CONV. TOT. $\Rightarrow$ CONV. UNIF.

DUNQUE f è continua. Inoltre, se ripeto i calcoli fatti la volta scorsa ottengo:

Fisso $k \geq 1$ (poi lo rifaccio per $k=0$ ..) moltiplico per $\sin(k\omega t)$ oppure $\cos(k\omega t)$ e integro tra 0 e T

$$\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int_0^T \Big(a_0 \sin(k\omega t) + \sum_1^\infty a_n \cos(n\omega t)\sin(k\omega t)$$

$$+ \sum_1^\infty b_n \sin(n\omega t)\sin(k\omega t)\Big)\,dt = \text{(posso scambiare perché ho la conv. unif.)}$$

$$\underbrace{a_0\int_0^T \sin(k\omega t)\,dt}_{=0} + \sum_1^\infty a_n \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(n\omega t)\,dt}_{=0} +$$

$$\sum_1^\infty b_n \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(k\omega t)\,dt}_{\substack{=0 \text{ se } n\neq k \\ \frac{T}{2} \text{ se } n = k}} = b_k \frac{T}{2}$$

$$\Leftrightarrow b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{analogo discorso per } a_0, a_n \\ \dots\end{array}\right)$$

TEOREMA (CONTINUAZIONE) Analogamente se $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$

⇒ la serie complessa converge unif. a una $f(t)$ continua

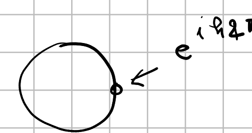
e si ha
$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-im\omega t}$$

Stessa dim. Vediamo, per curiosità, l'ultimo punto.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = \int_0^T \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t} e^{-ik\omega t} \right) dt = \left(\begin{matrix}\text{per la} \\ \text{conv.} \\ \text{unif.}\end{matrix}\right)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \int_0^T e^{i(m-k)\omega t}\, dt = c_k T$$



$$\text{Se } h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_0^T e^{ih\omega t}\, dt = \begin{cases} h \neq 0 & \left[\dfrac{e^{ih\omega t}}{ih\omega} \right]_{t=0}^{t=T} = \dfrac{1}{ih\omega}\left(e^{i\overbrace{h\omega T}^{2\pi}} - 1 \right) = 0 \\ h = 0 & \int_0^T dt = T \end{cases}$$

(La versione complessa rende i calcoli più rapidi...)

<u>TEOR.</u> (CONTINUAZIONE)

Se $\sum_1^\infty m^k |a_m| < +\infty$ e $\sum_1^\infty m^k |b_m| < +\infty$ allora

$$f(t) := a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)$$

(che per quanto sopra esiste ed è continua in t) È

DI CLASSE C^k e si può derivare per serie:

$$\frac{d^k}{dt^k} f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (m\omega)^k a_m \frac{d^k}{dx^k}\cos(x)\Big|_{x = m\omega t} + (m\omega)^k b_m \frac{d^k}{dx^k}\sin(x)\Big|_{x = m\omega t}$$

dove naturalmente
$$\frac{d^k}{dx^k}\cos(x) = \begin{cases} (-1)^{k/2}\cos(x) & \text{se } k \text{ è pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\sin(x) & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Analogamente se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k |c_n| < +\infty$ allora la funzione

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ è di classe C^k e si ha

$$\frac{d^k}{dt^k} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (in\omega t)^k e^{in\omega t}$$

(la formula nel caso complesso è più semplice!)

PER ESEMPIO $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^6} \sin(nt)$$

è di classe C^3 dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^6} n^3 < +\infty$ poiché $\frac{n^4}{1+n^6} \simeq \frac{1}{n}$

e si ha

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^6} \cos(nt) \qquad f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^3}{1+n^6} \sin(nt)$$

$$f'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^4}{1+n^6} \cos(nt)$$