Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 10/03/2025

Risoluzione "per serie" di eq. diff. (ordinarie, lineari di ordine 2)

NON A COEFF. COSTANTI – NON IN FORMA NORMALE

ESERCIZIO $$x y'' - y' - y = 0$$

LINEARE, OMOGENEA, DI ORDINE 2, NON È IN FORMA NORMALE SE LA CONSIDERO SU $\mathbb{R}$ (è in forma normale su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Se voglio risolvere vicino a $x=0$ non ho i teoremi standard

SE MI METTO VICINO A UN PTO $x_0 \neq 0$ so che esiste unica una sol. con $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ assegnati. Se mi metto vicino a $x_0 = 0$ questo non lo so più ...

IDEA cerco sol. del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (cerco sol. analitiche)

AMMETTIAMO CHE UNA TALE $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sia sol.

(DUNQUE la serie deve avere raggio di conv. $R>0$). ALLORA

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

se metto $n=0$ il termine è comunque nullo

scalo gli indici

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \right)$$

IMPONENDO L'EQUAZIONE HO :

$$0 = x y'' - y' - y = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big(a_{n+1}(n+1)n - a_{n+1}(n+1) - a_n\Big) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_{n+1}(n+1)(n-1) - a_n\Big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n^2-1)a_{n+1} - a_n\Big)x^n$$

Questa serie è identicamente nulla $\iff$ tutti i coeff. di x^n sono nulli $\Rightarrow$

$$(R) \qquad (n^2-1)a_{n+1} - a_n = 0 \quad \forall n$$

CONDIZIONE RICORSIVA SU (a_n)

ATTENZIONE: NON POSSO SCRIVERE $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1}$ (se $n=1$ divido per zero)

Mettiamo $n=1$ nella (R) $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = 0}$ $\big(\iff y'(0) = 0\big)$

Mettiamo $n=0$ $\Rightarrow$ $-\underbrace{a_1}_{=0} - a_0 = 0 \iff \boxed{a_0 = 0}$

(R) non mi dice niente su a_2: se $n \geq 2$ ho la relazione

$$(R') \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2-1} \quad n \geq 2 \qquad a_0 = a_1 = 0$$

(a_2 è "libero") a_0 e a_1 sono bloccati. Se assegno a_2 gli altri a_n $(n \geq 3)$ sono univocamente individuati da a_2

POSSIAMO prendere $a_2 = 1$ e chiamo $\hat{a}_n$ i coeff. con $\hat{a}_2 = 1$

$$\hat{a}_{n+1} = \frac{\hat{a}_n}{n^2-1} \qquad \hat{a}_0 = \hat{a}_1 = 0 \qquad \hat{a}_2 = 1$$

$\Rightarrow \hat{y}(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n$ risolve l'eq con $\hat{y}''(0) = 2$

$\left(\hat{a}_n = \dfrac{\hat{y}^{(n)}}{n!}\right)$. Se prendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e considero

$$y(x) = \alpha\,\hat{y}(x) = \alpha\sum_{n=2}^{\infty}\hat{a}_n x^n$$

trovo la sol. $\hat{y}$ tale che $\hat{y}''(0) = 2\alpha$

NON POSSO ASSEGNARE $y(0)$ o $y'(0)$. POSSO ASSEGNARE $y''(0)$

e dunque ho "un grado di libertà"

ATTENZIONE: C'È ANCORA UN PROBLEMA. Dati gli $\hat{a}_n$ come sopra posso dire che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n$ ha raggio di conv. $R>0$??

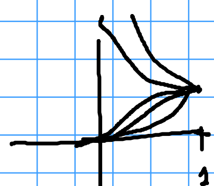
Come trovo R ?? $\quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\hat{a}_n} \overset{(CESARO)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_{n+1}}{\hat{a}_n} =$

($\hat{a}_n \geq 0 \ \forall n$ - NON SERVE $|\hat{a}_n|$) $\qquad$ (da $\mathbb{R}'$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = +\infty}$$

Effettivamente $\hat{y}$ è soluzione (su tutto $\mathbb{R}$).

È PROBABILE CHE, se risolvo in $x_0 > 0$, trovo delle soluzioni che divergono per $x \to 0$ (in x_0 ho sicuramente una famiglia di sol. che dipendono da $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ - DUE PARAMETRI)



$$y(x) = \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n \qquad \text{dove} \qquad \hat{a}_{n+1} = \frac{\hat{a}_n}{n^2-1} \quad \forall n \geq 2$$

$\hat{a}_2 = 1$

$$\hat{a}_2 = 1 \qquad \hat{a}_3 = \frac{1}{3}, \qquad \hat{a}_4 = \frac{1}{3}\frac{1}{8} = \frac{1}{24}, \qquad \hat{a}_4 = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{15} = \ldots$$

DONQUE. NON ESISTONO SOLUZIONI con $y(0) \neq 0$ o con $y'(0) \neq 0$

Viceversa esistono INFINITE SOL. CON $y(0) = y'(0) = 1$ (tutte quelle scritte sopra). Per individuarne una sola devo prescrivere una derivata $y^{(k)}(0)$ con $k \geq 2$. Se per esempio prescrivo $y^{(4)} = 1$ allora deve essere $a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

Da a_4 in poi uso (R').

Per trovare a_3 metto $n=3$ in R' $\Rightarrow$

$$\frac{1}{24} = a_4 = \frac{a_3}{8} \iff \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

Per trovare a_2 metto $n=2$ in R' $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3} = a_3 = \frac{a_2}{3} \Rightarrow \boxed{a_2 = 1} \qquad (\text{trovo } \hat{y}(x))$$

Con questa scelta dei coeff. quanto fa $\hat{y}'''(0)$??

Uso il fatto che

$$\frac{1}{3} = \hat{a}_3 = \frac{\hat{y}'''(0)}{6} \Rightarrow \underline{\hat{y}'''(0) = 2}$$

ALTRO ESEMPIO (NON OMOGENEO!)

$$x(x+1)y'' + (x-3)y' - 9y = \overbrace{-6+4x-5x^2}^{\text{termine noto} \neq 0}$$

Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n-1) x^n$$

Se impongo che valga l'eq:

$$-6+4x-5x^2 = (x^2+x)y'' + (x-3)y' - 9y =$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$-9\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(a_n n(n-1) + \underline{a_{n+1}(n+1)n} + a_n n \underline{-3(n+1)a_{n+1}} - 9a_n\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)(n-3) + a_n(n^2-n+n-9)\right)x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+1}\,(n+1)(n-3) + a_n\,(n-3)(n+3)\right) x^n = -6+4x-5x^2$$

DEVO VEDERE $-6+4x-5x^2$ come una serie di potenze. In effetti $-6+4x-5x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dove $b_0=-6$ $b_1=4$, $b_2=-5$ $b_n=0$ se $n\geq 3$ DUNQUE TROVO

$$(R)\qquad a_{n+1}(n+1)(n-3)+a_n(n-3)(n+3) = \begin{cases} -6 & n=0 \\ 4 & n=1 \\ -5 & n=2 \\ 0 & n\geq 3 \end{cases}$$

Metto $n=0$ $\rightarrow$ $a_1(-3)+a_0(-9)=-6$ $\boxed{a_1 = 2-3a_0}$

Metto $n=1$ $\rightarrow$ $a_2(-4)+a_1(-8)=4$ $\boxed{a_2=-1-2a_1}$

Metto $n=2$ $\rightarrow$ $a_3(-3)+a_2(-5)=-5$ $\boxed{a_3=\frac{5-5a_2}{3}}$

(ho a_0 a_1 e a_2 ne posso fissare 1 e gli altri sono determinati)

Metto $n=3$ $\rightarrow$ $0=0$ NESSUNA CONDIZIONE

Se $n\geq 4$ posso scrivere $a_{n+1} = -\frac{n+3}{n+1}a_n$ $(n\geq 4)$

DUNQUE (R) equivale a

$$(R')\quad \begin{cases} a_1 = 2-3a_0 \\ a_2 = -1-2(2-3a_0) = -5+6a_0 \\ a_3 = \frac{5-5(-5+6a_0)}{3} = \frac{30-30a_0}{3} = 10-10a_0 \end{cases} \qquad a_{n+1} = -\frac{n+3}{n+1}a_n \quad n\geq 4$$

POSSO PRESCRIVERE COME MI PARE a_0 e a_4 ($y(0)$ e $y^{(4)}(0)$)

POSSIBILI DOMANDE: 1 Se aggiungo le cond. iniziali $y(0)=0$ $y'(0)=2$ allora l'eq. ho

UNA SOLUZIONE | INFINITE SOLUZIONI | NESSUNA SOLUZIONE

La condizione ci dice $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$. Se guardo (R') vedo che la relazione tra a_0 e a_1 è verificata. Allora a_2 e a_3 sono date da R'. a_0 è libero $\Rightarrow$ INFINITE SOL.

(2) Se metto la condizione $y(0)=0$ $y^{(4)}(0)=120$ ($\Rightarrow$ la sol. esiste unica) Allora $y^{(5)}(0) = ??$

Da R' trovo $a_5 = -\frac{4+3}{4+1} a_4 = -\frac{7}{5} \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{7}{5}\frac{120}{24} = -7$

$\frac{y^{(5)}(0)}{5!} = a_5 = -7 \Rightarrow y^{(5)}(0) = -7 \cdot 120 \ldots$

(3) Cerco la soluzione con $y(0)=1$ $y^{(4)}(0)=0 \Rightarrow$

$a_n = 0 \ \forall n \geq 4$. Rimangono solo i termini di grado ≤ 3, che posso ricavare da R', partendo da $a_0 = 1$

$a_0 = 1$, $a_1 = 2 - 3a_0 = -1$, $a_2 = -5 + 6a_0 = 1$, $a_3 = 10 - 10a_0 = 0$

DUNQUE $y(x) = 1 - x + x^2$ (Si può provare e mettere $1-x+x^2$ nell'eq e fare la verifica)

ATTENZIONE NON ABBIAMO VERIFICATO CHE il raggio di conv. sia >0

Come prima abbiamo $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{\text{da } R'}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$

DUNQUE $R = 1$, cioè $y(x)$ converge in $]-1,1[$

In quest'ultimo ragionamento abbiamo supposto $a_n \neq 0$. In effetti $R=1$ VALE se $a_4 \neq 0$ ($\Rightarrow a_n \neq 0 \ \forall n \geq 4$). Se invece $a_4 = 0$ è ovvio che $R = +\infty$ ($\sqrt[n]{0} \to 0 \Rightarrow R = +\infty$)

LE SOL. CON $a_4 = 0$ sono date da:

$y(x) = a_0 + (2-3a_0)x + (-5+6a_0)x^2 + (10-10a_0)x^3 =$

$$a_0 \underbrace{\left(1-3x+6x^2-10x^3\right)}_{\text{soluzione dell'omogenea}} + \underbrace{2x-5x^2+10x^3}_{\text{soluzione particolare (con } y(0)=0)}$$

Serie di Fourier $\simeq$ serie trigonometriche cioè serie del tipo

$$\left(f(t) \doteq\right) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \qquad \leftarrow$$

Termine noto (lo potrei mettere nella serie dei coseni)

$\omega > 0$ parametro fissato (frequenza angolare). $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ successioni assegnate in $\mathbb{R}$. LA DOMANDA È per quali t le due serie a dx convergono.

<u>OSS.</u> Se $f(t)$ esiste $\Rightarrow$ f è T-periodica con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \left(\cos\left(n\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = \cos\left(n\omega t + 2\pi\right) = \cos(n\omega t)\right)$

<u>SIAMO NELL'AMBITO DELLE FUNZIONI T-periodiche.</u>

L'idea sottostante è rappresentare un "segnale" T-periodico come "sovrapposizione di armoniche": armonica = segnale sinusoidale con frequenza multipla di ω.

DISCORSO "QUALITATIVO". AMMETTIAMO CHE $f(t)$ esista (in $\leftarrow$). Vediamo il legame tra f e i "coefficienti" a_n / b_n. Supponiamo che valga $\leftarrow$

Fisso $k \geq 1$ e moltiplichiamo per $\cos(k\omega t)$

$$f(t)\cos(k\omega t) = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)\cos(k\omega t)$$

INTEGRO TRA 0 e T $\left(= 2\pi/\omega\right)$

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = a_0 \underbrace{\int_0^T \cos(k\omega t)\,dt}_{=0} + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\quad\right) \cos(k\omega t)\,dt$$

SUPPONGO POTER SCAMBIARE INTEGRALE E SERIE (??) Allora

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t) + b_n \int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,dt\right)$$

SI PUÒ VEDERE CHE

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,dt = 0 \qquad \forall n \ \forall k$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,dt = 0 \qquad \forall n \ \forall k \ \ \text{CON } n \neq k$$

INVECE se $n = k$

$$\int_0^T \cos^2(k\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1+\cos(2k\omega t)}{2}\,dt = \frac{T}{2} \qquad \text{DUNQUE}$$

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{T}{2} a_k \iff \boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad k \geq 1}$$

Se rifaccio lo stesso calcolo moltiplicando per $\sin(k\omega t) \Rightarrow$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt}$$

e per $k = 0$ trovo $\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$

DUNQUE se conosco la somma della serie trigonometrica $f(t)$ trovo il legame scritto sopra con i coeff.

(A PATTO DI POTER FARE LO SCAMBIO SERIE / INTEGRALE)