Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 42 06/03/2025

Da quanto visto l'altra volta usando $f(x)=e^x$ si può ricavare che

Se f è C^∞ su I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$
$\Rightarrow$ sono definiti i coeff. di Taylor $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Possiamo chiederci se si può scrivere $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
per $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ con $\delta>0$ opportuno

IN GENERALE LA RISPOSTA È NO (come già visto x $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ ..)

Perché la risposta sia sì bisogna usare la formula di Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,n})(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)}$$

con $\xi_{x,n}$ compreso tra x e x_0

SE ho un controllo su $f^{(n+1)}(\xi_{x,n})$ posso far tendere $n \to \infty$ (sperando che $f^{(n+1)}(\xi_{x,n})(x-x_0)^{n+1} \to 0$)

PER ESEMPIO POSSO CONSIDERARE L'IPOTESI

IPOTESI $\sup_{x\in I} |f^{(n)}(x)| \leq K^n$ per un'opportuna costante K

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{K^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \text{ se } n \to \infty$$

(x fissato)

Nel caso di e^x $\quad f^{(n)}(x) = e^x \leq e^b$ se $x \in]0,b[$

Analogamente posso fare questo ragionamento e mostrare che

$f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

sono somme delle rispettive serie di Taylor

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{se } |x|<1$$ (l'abbiamo già visto)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{se } |x|<1 \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}^{n \text{ termini}}}{n!}$$

(se $\alpha = k$ intero ritrovo $\frac{k!}{n!(n-k)!}$)

Riprendiamo ancora $e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Notiamo che anche senza conoscere l'eguaglianza sopra avremmo potuto definire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e vedere che:

- f è ben definita su $\mathbb{R}$ (dato che $\sqrt[n]{n!} \to \infty \Rightarrow R = +\infty$)
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalo l'indice}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$

HO TROVATO CHE questa f verifica $f' = f$

- $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ ($0^n = 0$ se $n \geq 1$, $0^0 = 1$, $0! = 1$)

IN EFFETTO POSSO ANCHE TROVARE CHE

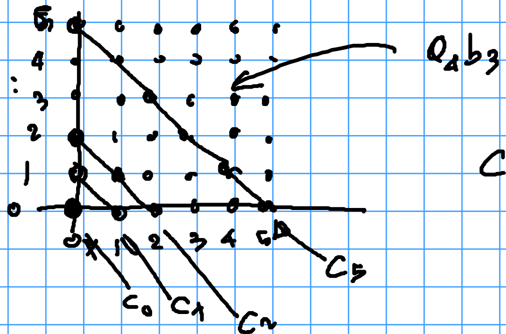
- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

→ Ricordo una proprietà delle serie numeriche:

Se a_n e b_n sono due successioni (di numeri reali o anche complessi). Si definisce il "prodotto alla Cauchy":

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

IDEA:



Ci sono le somme sulle diagonali

ALLORA se $\sum |a_n| < +\infty$ e $\sum |b_n| < +\infty$ (sono assolutamente convergenti) $\Rightarrow$

$\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ sono convergenti. E SI HA

$$\sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n = \sum_0^\infty c_n$$

(IDEA $\sum_n a_n \sum_m b_m = \sum_{mn} a_m b_n$ ← le somme sulle diagonali)

TUTTO QUESTO È VERO – NO DIM. –

TORNIAMO a $f(x) f(y) = f(x+y)$!! Usando il prodotto alla Cauchy:

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) =$$

$$\left(a_n = \frac{x^n}{n!} \quad b_n = \frac{y^n}{n!} \right)$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y)$$

POTREI DEFINIRE e^x come la somma della serie $\sum \frac{x^n}{n!}$

TRA L'ALTRO LA DEFINISCO AUTOMATICAMENTE SU $\mathbb{C}$

Come detto le serie di potenze $\sum a_n z^n$ si posso fare se $z \in \mathbb{C}$ (con $a_n \in \mathbb{C}$) e in questo caso la convergenza si ha nel disco $B(0,R) = \{z : |z| < R\}$ (oppure $B(z_0 R)$ se considero $\sum a_n (z-z_0)^n$)

ALLORA è ragionevole definire

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ che converge su ogni $z \in \mathbb{C}$

Se faccio così trovo

$$e^0 = 1 \qquad e^{x+y} = e^x e^y$$ (COME HO FATTO SOPRA)

Vediamo in termini di parte reale e parte immaginaria:

Se $z = x + iy \Rightarrow$ la conosco

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Cosa è e^{iy} ??

Se faccio il coniugato di $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \Rightarrow$

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(iy)^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = e^{-iy}$$

$$\Rightarrow \|e^{iy}\| = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^0 = 1$$

QUINDI e^{iy} è un numero complesso di modulo 1

INOLTRE

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} y^{2k+1}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k}}_{\text{"ascissa"}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}}_{\text{ordinata}} = \cos(y) + i \sin(y)$$

SE CONOSCO GIÀ I SENI/COSENI

MORALE Se definisco e^z $\sin x$ $\cos x$ come le rispettive serie di potenze TUTTO TORNA ed è in un certo senso più economico.

OSS. La def $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ è anche "buona" per il calcolo numerico di e^x perché il termine $\frac{x^n}{n!}$ va abbastanza velocemente a zero. Per esempio (caso semplice)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \sum_{m \geq 7} \frac{1}{m!}$$

lo posso stimare?

STIMA GROSSOLANA $\frac{1}{m!} \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{2^m}{m!} \leq 1$ se $m \geq 4$.

$$\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right) \cdots \left(\frac{2}{m}\right) \leftarrow \boxed{m \geq 4 \quad \text{TORNA}}$$

$$2 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}$$

ALLORA $\sum_{m \geq 7} \frac{1}{m!} \leq \sum_{m \geq 7} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^7} \sum_{n \geq 7} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} =$ (scalo gli indici)

$$\frac{1}{2^7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^7} \, 2 = \frac{1}{2^6}$$

serie geometrica di ragione 1/2 che converge a 2

Se mi fermo a $n = 6$ l'errore è $< \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Se faccio nello stesso modo riesco a mostrare che ($\text{se } k \geq 4$)

$$\left| e - \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{n!} \right| < \frac{1}{2^k} \leftarrow$$

questa mi da una buona stima dell'errore se $K = 10$ ho un errore $< \frac{1}{1024}$

NOTA CHE $\left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0$ con andamento esponenziale.

TORNIAMO SULLA NOZIONE DI FUNZIONE ANALITICA

<u>Def.</u> $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto di $\mathbb{R}$
(potrebbe essere $f: \Omega \to \mathbb{C}$ Ω aperto in $\mathbb{C}$)
Dico che f è analitica in I se
per ogni $x_0 \in I$ esiste $r > 0$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se $|x-x_0| < r$

CON QUESTA DEF. ho che f analitica $\Rightarrow$ f è $C^{\infty}(I)$
ma non vale il viceversa (come visto con l'esempio $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$)

Le analitiche sono funzioni "molto regolari" che hanno proprietà simili a quelle dei polinomi.

<u>TEOREMA 1</u> Se $f: I \to \mathbb{R}$ è analitica in I, se x_n è una successione in I che tende a un punto $x \in I$, e $f(x_n) = 0$ $\forall n$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ $\forall x \in I$

(ricorda che un polinomio di grado n che si annulla in $n+1$ punti è necessariamente nullo)

<u>TEOREMA 2</u> Se $f: I \to \mathbb{R}$ è analitica in I, se $x_0 \in I$ e
$f^{(n)}(x_0) = 0$ $\forall n$

$\Rightarrow f(x) = 0$ $\forall x \in I$

Il teorema 2 si dimostra abbastanza semplicemente:
Se $f^{(n)}(x_0) = 0$ $\forall n$ so che $f(x) = 0$ per $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$
(la serie di Taylor nel punto x_0 è identicamente nulla!)
QUINDI $f = 0$ IN UN INTERVALLO INTORNO A x_0 $]x_0 - r, x_0 + r[$

Per continuità, $f=0$ in $[x_0-r, x_0+r]$ (a meno che gli estremi non siano fuori da I)
Prendo $x_1 = x_0+r$ e rifaccio lo stesso ragionamento.
Con un po' di pazienza si dimostra che $f=0$ su tutto I.

<u>TEOREMA</u> Se a_n è una successione e $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $]x_0-r, x_0+r[$ $\Rightarrow$ f è analitica in $]x_0-r, x_0+r[$

NON LO DIMOSTRO. ATTENZIONE - NON È OVVIO - IL TEOREMA DICE CHE se f è somma della serie di Taylor in x_0 $\Rightarrow$ f è somma della sua serie di Taylor in ogni $x_1 \in]x_0-r, x_0+r[$

TUTTE LE FUNZIONI ELEMENTARI sono analitiche eccetto quelle che hanno potenze non intere

$\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\ln(x)$ (su $]0,+\infty[$),
$\sqrt{x}$ è analitica su $]0,+\infty[$

VEDIAMO UNA POSSIBILE APPLICAZIONE DI QUESTI CONCETTI

VOGLIO RISOLVERE UN' EQ. DIFF. ORDINARIA DI II° ORDINE

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = h(x) \qquad \left(\begin{array}{l} a,b,c \text{ continue} \\ \text{su un intervallo } I \end{array}\right)$$

QUESTA È UN'EQ. <u>LINEARE</u> (OMOGENEA se $h(x)=0$)

$\Rightarrow$ (a) Se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea $\Rightarrow$
$\lambda y_1 + \mu y_2$ è sol. dell'omogenea
(b) Se y_0 è sol. dell'omogenea e $\bar{y}$ è sol. $\Rightarrow$ $y_0+\bar{y}$ è sol.

SE $\boxed{a(x)=1}$ dico che l'eq. è in forma NORMALE

IN QUESTO CASO SI SA CHE

(c) la dimensione dello spazio delle soluzioni dell'omogenea è 2

$\iff$ esistono due soluzioni y_1 e y_2 tali che ogni altra

sol. y è scrivibile come $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

$\iff$ per trovare tutte le sol. mi basta trovarne DUE LIN. INDIP.

OSS. Se $a(x) \neq 0$ posso dividere per $a(x)$ e mettere l'eq. in forma normale!

PERÒ se i coefficienti dipendono da x non c'è una formula che mi permette di trovare le soluzioni dell'omogenea

IDEA. Cerco le sol. y come serie di potenze.

Se faccio così è naturale chiedere che a, b, c siano analitiche

Questo ragionamento è supportato dal seguente teorema

TEOREMA Se a, b, c sono analitiche e $a \neq 0$ $\Rightarrow$ le y soluzioni sono analitiche.

(poi vedremo casi più interessanti)

ESEMPIO (BANALE) eq. di ordine 1 e non 2

$$y' = \frac{1}{2} y \qquad \text{(OMOGENEA, COEFF. COSTANTI)}$$

Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Se derivo trovo $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \underbrace{}_{\text{scalo gli indici}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

$m = n-1$ $\quad n = m+1 \to \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1) x^m$

Se impongo l'eq. $\frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum a_{n+1}(n+1) x^n \iff$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - 2(n+1) a_{n+1} \right) x^n = 0 \iff \left(a_n - 2(n+1) a_{n+1} \right) = 0 \quad \forall n$$

(segue dal Teorema 1)

$$\iff \boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}} \quad (R) \quad \text{RELAZIONE RICORSIVA.}$$

Posso fissare a_0 in modo arbitrario - dopo di che gli a_n sono tutti determinati:

a_0 DATO, $a_1 = \frac{a_0}{2}$, $a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2}$

$a_3 = \frac{a_2}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \;\; 2^2 \cdot 2} = \frac{a_0}{2^3 \;\; 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$a_4 = \frac{a_3}{2 \cdot 4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \;\; 2^3 \cdot 3!} = \frac{a_0}{2^4 \;\; 4!}$

Sembra che $a_n = \frac{a_0}{2^n \; n!}$. Vediamo se è vero.

Se $n = 0$ $\quad a_0 = \frac{a_0}{2^0 \, 0!} = a_0$ $\quad$ OK

Se è vero per n, vediamo che succede in $n+1$:

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)} = \frac{a_0}{2(n+1) \;\; 2^n \; n!} = \frac{a_0}{2^{n+1} \; (n+1)!}$ $\quad$ TORNA

DUNQUE $\quad a_n = \frac{a_0}{2^n n!}$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = a_0 \, e^{x/2}$$

HO RITROVATO UNA COSA CHE POTEVO OTTENERE FACILMENTE

$y(x) = a_0 \, e^{x/2}$ $\qquad (a_0 = y(0))$

però il metodo si può usare anche se i coeff. dipendono da x, nel qual caso non è detto che si possa trovare esplicitamente la somma della serie.

LA PROSSIMA VOLTA VEDIAMO DEGLI ESEMPI PIÙ INTERESSANTI !