Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41 05/03/2025

Serie di potenze. ALTRI ESEMPI

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Abbiamo già visto che il raggio di convergenza è $R=1$ $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1\right)$

f è definita su $]-1,1[$ e non è definita fuori da $[-1,1]$

Se guardo $x=1$ $\Rightarrow$ trovo $\sum_{1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow f$ non è definita in $x=1$

Se guardo $x=-1$ trovo $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz $\left(\frac{1}{n} \to 0\right.$ in modo decrescente$\left.\right)$

DUNQUE f è definita su $[-1,1[$.

Sappiamo che f è derivabile in $]-1,1[$ e che se $|x|<1$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \text{("scalo gli indici")}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \leftarrow \text{serie geometrica. DUNQUE } \boxed{f'(x) = \frac{1}{1-x}} \text{ se } -1<x<1$$

Allora deve essere $f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{dt}{1-t} =$

$$f(0) + \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x = f(0) + \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (-1<x<1)$$

D'altra parte $f(0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$ (manca $n=0$)

HO TROVATO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$

Che succede in -1 ?? So che esiste $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e che esiste $\ln\left(\frac{1}{1-(-1)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. POSSO DIRE CHE SONO EGUALI? POSSO DIRLO SE DIMOSTRO CHE

$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è continua fino a -1.

SERVE UN RAGIONAMENTO "AD HOC" specifico per questa serie. Cerco di dimostrare che la serie converge UNIFORMEMENTE su $[-1,0]$. Se ci riesco trovo che f è continua su $[-1,0]$ $\Rightarrow$ deduco che $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

NOTA NON HO LA CONV. TOTALE perché $\|f_n\|_{\infty,[-1,0]} = \max_{-1 \leq x \leq 0} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ e $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Vediamo come posso recuperare la conv. unif.

Devo considerare $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ (le somme parziali)

e dimostrare che $\| S_n - f \|_{\infty,[-1,0]} \to 0$

USO LE PROPRIETÀ DELLE SERIE A SEGNI ALTERNI

Se $a_n \geq 0$ $a_n \to 0$ e $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. So già che S_n ha limite $S \left(= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\right)$ e che

$$(*) \qquad S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_{2n+2}$$

$$S_{2n} - S_{2n+1} \leq a_n \quad (\to 0)$$

(è il succo della dim. di Leibniz)

DUNQUE (da A) RICAVO

$$|S_n - S| \le a_n$$ sia se n è dispari, sia se n è pari

TORNIAMO AL NOSTRO CASO: $\left(a_n = |x| \quad \text{se } x \le 0 \right)$

$$|S_n(x) - f(x)| \le \frac{|x|}{n} \le \frac{1}{n} \qquad \text{se } -1 \le x \le 0$$

DUNQUE $\|S_n - f\|_{\infty, [-1,0]} \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

DUNQUE TUTTO FUNZIONA e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n} = -\ln(2)$$

NOTIAMO CHE ABBIAMO TROVATO UN ESEMPIO DI SERIE UNIF. CONV. MA NON TOTALMENTE CONV. !!

ALTRO ESEMPIO:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad (a_0 = 0)$$

Anche questo ha raggio 1 dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$.

È chiaro che f è definita su $]-1,1[$ e non è definita se $x \ge 1$ o $x \le -1$

Cerchiamo l'espressione esplicita di $f(x)$.

Se derivo termine a termine trovo $\sum n^2 x^{n-1}$ PEGGIO...

NON SEMBRA UTILE

PROVIAMO A FARE LA "PRIMITIVA" termine a termine

$$\int n x^n \, dx = n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{BRUTTO...}$$

FACCIAMO IN MODO PIÙ FURBO: uso la "derivazione per serie"

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n x^{n-1}}_{\text{derivata di } x^n} = x \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) =$$

$$x\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 0\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ESEMPIO Partiamo da $f(x) = e^x$

so che f è C^∞ e che $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \ \forall x$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \Rightarrow$ i coeff. di Taylor di f sono $a_n = \frac{1}{n!}$ $\left(\underbrace{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^{n+1})}_{\text{Taylor}} \right)$

POSSO AFFERMARE CHE $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

SÌ a causa del "resto di Lagrange" INFATTI

dato $n \in \mathbb{N}$ so che

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{S_n(x)} + \frac{e^{\xi_{x,n}}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove $\xi_{x,n}$ è un punto intermedio tra 0 e x

Allora $\left| e^x - S_n(x) \right| \le \frac{e^{\xi_{x,n}}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(\xrightarrow{n\to\infty} 0 \right)$ $\boxed{(n+1)! \text{ VINCE SU } |x|^{n+1}}$

DUNQUE se fisso x trovo $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(= \lim_{n\to\infty} S_n(x) \right)$

IN ALTRI TERMINI $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha come limite puntuale e^x. Però dalla disuguaglianza sopra $\Rightarrow$

Si fissa $c > 0$ ho

$$\left| e^x - S_n(x) \right| \leq \frac{e^c |c|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall n, \ \forall x \in [-c, c]$$

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente a e^x in ogni $[-c, c]$

<u>N.B.</u> TORNA CON IL FATTO CHE

$$\sqrt[n]{1/n!} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} n+1 = +\infty \qquad (\text{CESARO})$$

In questo caso e^x è somma della sua serie di Taylor in $x_0 = 0$