Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 40 03/03/2025

$f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^4 + x^4}$ stavamo studiando $\sum_1^\infty f_n$. $\boxed{f(x) := \sum_1^\infty \dfrac{n^2 x}{n^4 + x^4}}$

VISTO CHE (a) LA SERIE NON CONVERGE TOTALMENTE SU $[0, +\infty[$
però (b) fissato $c > 0$ la serie converge totalmente su $[0, c]$
Da (b) $\Rightarrow$ $\forall c$ f (esiste ed) è continua su $[0, c]$ $\Rightarrow$ f è continua su $[0, +\infty[$

DOMANDA f è derivabile. Posso "derivare per serie" cioè dire che

$$f'(x) = \sum_1^\infty f_n'(x) \quad ??$$

Per questo serve che la serie delle f_n' converga unif. su $[0, +\infty[$?? o anche su $[0, c]$ $\forall c > 0$. Proviamo con la convergenza totale

Devo calcolare $f_n'(x) = n^2 \dfrac{n^4 + x^4 - 4x^4}{(n^4 + x^4)^2} = n^2 \dfrac{n^4 - 3x^4}{(n^4 + x^4)^2}$

Se voglio la conv. totale su $[0, +\infty[$ devo calcolare

$$\| f_n' \|_\infty = \sup_{x \geq 0} \frac{n^2(n^4 - 3x^4)}{(n^4 + x^4)^2}$$

$\leftarrow$ dovrei trovare il max di questa funzione al variare di $x \geq 0$ (N.B. f all'infinito $\to 0$)

Se si fanno i conti si vede che il punto di max dipende da n (e va a $+\infty$). Se calcolo il max trovo qualcosa $\simeq \dfrac{1}{n}$. NON C'E' conv. totale perché $\sum 1/n = +\infty$.

Proviamo a fare $\|f_n'\|_{\infty,[0,c]} = \sup_{0\le x\le c} |f_n'(x)| =$

$$\sup_{0\le x\le c}\left|\frac{n^2(n^4-3x^4)}{(n^4+x^4)^2}\right| \le \sup_{0\le x\le c}\left(\frac{n^6}{(n^4+x^4)^2}+\frac{3x^4n^2}{(n^4+x^4)^2}\right) \le \frac{n^6}{n^8}+\frac{3c^4n^2}{n^8} = \frac{1}{n^2}+\frac{3c^4}{n^6}$$

DUNQUE $\|f_n'\|_{\infty,[0,c]} \le \frac{1}{n^2}+\frac{3c^4}{n^6} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,[0,c]} < +\infty$

NE SEGUE CHE f è C^1 e che $f'(x) = \sum_1^{\infty} f_n'(x)$

RAGIONANDO IN QUESTO MODO POTREI DIM. CHE $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f \in C^k([0,+\infty[) \quad e \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n^{(k)}(x)$$

UNA CURIOSITÀ: Abbiamo visto che non c'è conv. totale per la serie delle f_n su $[0,+\infty[$. Potrebbe però succedere che la serie sia unif. conv. (CONV. TOT. $\Rightarrow$ CONV. UNIF. ma non vale $\Leftarrow$)

POSSIAMO CHIEDERCI SE la serie conv. unif. su $[0,+\infty[$, oppure no.

LA RISPOSTA È NO. Per vederlo osserviamo che - se ci fosse la conv. unif - potrei dire che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \sum 0 = 0$

Dovrei dunque avere che $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{n^2 x}{n^4+x^4} \to 0$ se $x \to +\infty$

Mostriamo che quest'ultima proprietà NON VALE ($\Rightarrow f$ non CONV. UNIF.)

Dato m intero si ha $(x=m)$

$$f(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 m}{n^4+m^4} \ge \sum_{n=1}^{m} \frac{n^2 m}{n^4+m^4} \ge \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{m^4+m^4}\, n^2 = \frac{1}{2m^3}\sum_{n=1}^{m} n^2$$

$$= \frac{1}{2m^3}\left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right) \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{6}$$

(IN GENERALE SI SA CHE $\sum_{n=1}^{m} n^k$ è un polinomio $P_k(m)$ di grado $k+1$)

$\left(\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}\right)$

Ho TROVATO CHE $f(n) \geq$ qualcosa che tende a $\frac{1}{6}$ per $n \to \infty$

QUESTO ESCLUDE CHE $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$

SERIE DI POTENZE

È dato una successione (a_n) in $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ (o in $\mathbb{C}$)

voglio considerare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ (una sorta di POLINOMIO DI GRADO ∞)

In questo caso dunque ho $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dove $f_n(x) = a_n x^n$.

PRIMO PROBLEMA: DETERMINARE $\{x \in \mathbb{R} :$ la serie converge$\}$

DEF. Chiamo raggio di convergenza della serie $\sum a_n x^n$ il numero $R \in [0, +\infty]$ ottenuto con $R = \frac{1}{L}$ da

$$L = \max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \left(= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ se questo esiste} \right)$$

(se $L = 0 \Rightarrow R = +\infty$, se $L = +\infty \Rightarrow R = 0$)

TEOREMA Sia (a_n) come sopra e sia R il raggio di convergenza. Supponiamo $R > 0$ ($\sqrt[n]{|a_n|}$ non ha max lim $= +\infty$). Allora:

(a) la serie converge puntualmente su $]-R, R[$

(b) Se $0 \leq R' < R$ la serie converge totalmente su $[-R', R']$ $\Rightarrow$ f CONTINUA su $]-R, R[$

(c) se $|x| > R$ la serie $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ non converge.

N.B. Il teorema non dice nulla sui punti $x = -R$, $x = R$ e andrebbero considerati caso per caso.

Dim Notiamo anche che $(b) \Rightarrow (a)$

Dimostro (b). Prendo $0 \leq R' < R$ (so che $R > 0$ ...)

Se $f_n(x) = a_n x^n$ allora $\|f_n\|_{\infty, [-R', R']} = \max_{-R' \leq x \leq R'} |a_n x^n| = |a_n| (R')^n$

Vorrei dim. che $\sum_0^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [-R', R']} < +\infty$ cioè $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (R')^n < +\infty$

USO IL CRITERIO DELLA RADICE n-ESIMA: se $\alpha_n \geq 0$ e se

$\sqrt[n]{d_n} \to \ell < 1$ (max lim) allora $\sum_n d_n < +\infty$. Nel nostro caso $d_n = |a_n|(R')^n$

e allora $\sqrt[n]{|a_n|(R')^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\, R' \longrightarrow L\, R' = \frac{1}{R} R' < 1$ dato che $R' < R$

HO VERIFICATO LA CONV. TOTALE su $[-R', R']$

(N.B. NON POSSO DIRE INVECE CHE C'È CONV. TOTALE SU $]-R, R[$)

Vediamo che vale (c). Prendo x con $|x| > R$. So che

$$\max\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \max\lim |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, L = \frac{|x|}{R} > 1$$

Questo implica che $\lim_{n\to\infty} a_n x^n$ NON PUÒ ESSERE ZERO

e quindi la serie $\sum a_n x^n$ NON PUÒ CONVERGERE.

ESEMPI (notevoli) Serie geometrica $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

IN QUESTO CASO $a_n = 1$ $\forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

Il teorema di prima dice che $g(x)$ converge su $]-1, 1[$ non converge fuori da $[-1, 1]$. INOLTRE CONVERGE UNIF. su ogni $[-c, c]$ con $0 \leq c < 1$

IN REALTÀ LO SAPEVAMO GIÀ. Sappiamo che $\sum_{h=0}^{k} x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ $\nearrow \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$; $\searrow$ diverge se $x \geq 1$, INDET. se $x \leq -1$

DUNQUE $g(x) = \frac{1}{1-x}$ se $-1 < x < 1$. FUORI DA $]-1, 1[$ $g(x)$ non converge.

Consideriamo ora $h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. È ancora una serie di potenze

con $a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$ $\qquad a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1 \ldots$

Se cerco il raggio di conv. devo calcolare $L = \max\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ $= 1$

dove $|a_n| = 0$ se n dispari $|a_n| = 1$ se n è pari. $\left(\min\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \ldots\right)$

$\Rightarrow \boxed{R = 1} \Rightarrow h(x)$ è definita per $|x| < 1$.

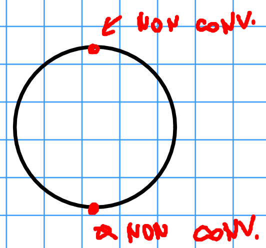
Perché posso notare che $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ se $x^2 < 1$

IN QUESTO CASO $h(x)$ si può estendere in $x = 1$ o $x = -1$ (vedi V2)

CI SI PUÒ CHIEDERE DA DOVE ESCE 1 come raggio di convergenza.

Se guardiamo $h(x)$ nei complessi trovo $h(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ← è singolare in $z = \pm i$

e quindi



(se mi metto in $\mathbb{C}$ l'insieme di convergenza è $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$ che è un cerchio aperto.

OSS. Potrei anche considerare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ che è "centrato in x_0" invece che in zero. Questi casi li posso facilmente recuperare mediante una traslazione. (avrò $]x_0 - R, x_0 + R[$ invece di $]-R, R[$)

ESEMPIO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Qui $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$

IN QUESTO CASO se $x = 1$ ho $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

se $x = -1$ ho $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per Leibniz

Se prendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ trovo $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1 \Rightarrow R = 1$

e in questo caso la serie converge anche in $+1$ e in -1

• QUESTE SERIE SONO DERIVABILI ??

TEOREMA Sia (a_n) come sopra R il raggio di conv. $R > 0$. Sia $k > 0$

Allora la serie delle derivate k-esime è ancora una serie di potenze con raggio R.

In effetti se $f_n(x) = a_n x^n \Rightarrow f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < k \\ n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k} \end{cases}$

e se faccio $\sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-k+1)|a_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n-1}\cdots\sqrt[n]{(n-k+1)}\,\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow \frac{1}{R}$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{n-1} \to 1$, $\sqrt[n]{(n-k+1)} \to 1$, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1/R$

Ne segue che la serie delle derivate conv. totalmente su $[-R', R']$
$\forall R' < R \Rightarrow$ Posso scambiare derivate e serie.

IN DEFINITIVA $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, definita su $]-R, R[$

(R = raggio di convergenza) è di classe C^∞ e si ha

(D) $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} \qquad -R < x < R$$

OSS. IN TUTTO QUANTO DETTO FINORA sto assumendo la convenzione
$x^0 = 1$ $\forall x$ (anche $x=0$) SE NO DOVREI SCRIVERE $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Se METTO $x=0$ in (D) trovo

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, 0^{n-k}$$ ← TUTTI GLI ADDENDI SONO NULLI ECCETTO che per $n=k$

$$= k(k-1)\cdots(k-k+1)\cdot 1\cdot a_k = k!\, a_k$$

↑ TERMINE CON $n=k$

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k \iff a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$$ ← COEFF. DI TAYLOR K-ESIMO.

DUNQUE: Date $(a_n) \to$ costruisco $f(x) = \sum a_n x^n \to$ faccio lo sviluppo di Taylor in zero $\to$ ritrovo gli a_n

Il P_k di Taylor di grado k è $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$

POSSO ANCHE DIRE CHE – se f è una serie di potenze –

$f(x)$ è la somma della sua "serie di Taylor"!

ATTENZIONE: NON È LO STESSO CHE DIRE.

Data f C^∞ definita su $]-R,R[$, $\rightarrow$ posto $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\rightarrow$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

QUESTA PROPRIETÀ PUÒ ESSERE FALSA.

<u>CONTROESEMPIO</u> Considero

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{se } x\neq 0 \qquad f(0)=0$$

· VEDIAMO CHE f è continua in zero: $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} \text{ "}=\text{" } e^{-\infty} \text{ "}=\text{" } 0$ <u>OK</u>

· Calcolo $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{2}{x^3}$ se $x\neq 0$. Vedo che $f'(x)\to 0$ se $x \to 0$
(VINCE L'ESPONENZIALE)

· Calcolo $f''(x) = \dfrac{\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}\cdot x^3 - 2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 3x^2}{x^6} = e^{-1/x^2}\dfrac{2-6x^2}{x^6}$

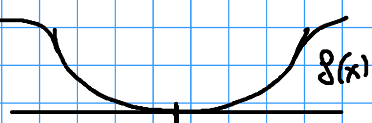
onde $f''(x) \to 0$ se $x \to 0$ (VINCE e^{-1/x^2} !!)

· IN GENERALE POTREI DIM. CHE $f^{(k)}(x) = e^{-1/x^2}\dfrac{P_k(x)}{x^{3k}}$

per un opportuno polinomio $P_k(x)$. Anche qui ho $f^{(k)}(x) \to 0$ se $x\to 0$

DUNQUE QUESTA FUNZIONE È C^∞ e $f^{(k)}(0)=0$ $\forall k$

Infatti, se $x\neq 0$, $f(x)>0$



I coeff. (a_n) di Taylor di $f(x)$ sono tutti zero!! $\Rightarrow$ NON È POSSIBILE CHE

$$f(x) = \sum a_n x^n = 0 \quad (\text{eccetto che in } x=0)$$

· LE FUNZIONI OTTENUTE COME SOMME DI POTENZE SONO UN SOTTOINSIEME <u>PROPRIO</u> delle C^∞

<u>DEF.</u> Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$
Dico che f è <u>ANALITICA</u> se $\forall x_0 \in I$ esiste $r>0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ per $|x| < r$ (f è somma della sua serie di Taylor, in un intorno di ogni x_0)

LE FUNZIONI ANALITICHE SONO DELLE PARTICOLARI C^∞ . . . .