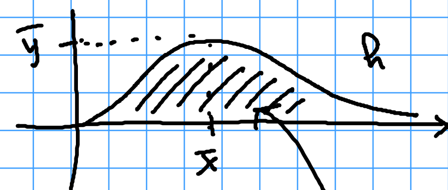
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 39 27/02/2025

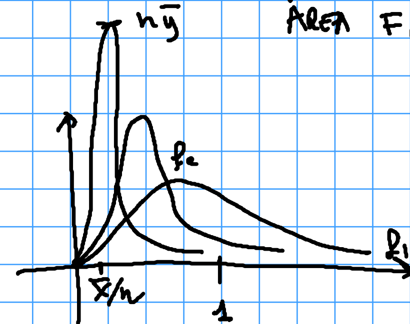
Voglio tornare un attimo sui controesempi relativi allo scambio

INTEGRALE $\Leftrightarrow$ LIMITE

TORNIAMO A $h(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$



AREA FINITA $\left(\dfrac{x}{1+x^4} \simeq \dfrac{1}{x^3} \text{ per } x \to +\infty \right)$



Prendiamo $f_n(x) = n\, h(nx) = \dfrac{n^2 x}{1+n^4x^4}$ su $[0,1]$

Naturalmente a fisso x ho che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4 x^4} = 0 \qquad \text{cioè } f_n \to 0 \text{ puntualmente}$$

Calcolo $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 h(\underbrace{nx}_{y})\,\underbrace{n\,dx}_{dy} = \int_0^n h(y)\,dy \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^{+\infty} h(y)\,dy$ (>0, finito)

HO TROVATO UNA SUCC. DI FUNZIONI $f_n : [0,1]$ ($[0,1]$ è limitato!)

tali che f_n sono continue, $f_n \to 0$ puntualmente ma

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \ell > 0 \quad \left(\ell \neq \int_0^1 0\,dx = 0 \right)$$

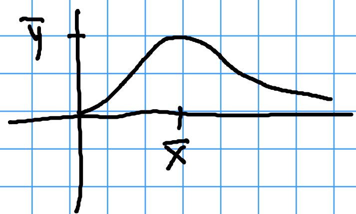
NON SI PUÒ SCAMBIARE IL LIMITE IN n CON l'integrale. MANCA LA CONV. UNIF. per poter applicare il teorema di ieri. IN EFFETTI se calcolo

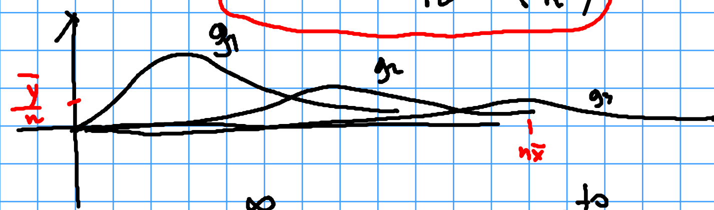
$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max_{[0,1]} |f_n| = \bar y \cdot n \quad \left(\text{almeno se } n \text{ è grande in modo che } \bar x < n\right)$$

e dunque $\|f_n\|_\infty \to \infty$ e non tende a zero!

<u>ALTRO CONTROESEMPIO</u> Anche con la convergenza uniforme il teorema non vale se A è illimitato (<u>se A ha misura infinita</u>)

Posso in effetti considerare $\boxed{g_n(x) = \frac{1}{n} h\left(\frac{x}{n}\right)}$ $A=(0,+\infty)$!!





Come prima ho $\displaystyle\int_0^\infty g_n(x)\,dx = \int_0^\infty h\Big(\underbrace{\frac{x}{n}}_{y}\Big)\underbrace{\frac{dx}{n}}_{dy} = \int_0^{+\infty} h(y)\,dy$ = costante in n

Se faccio il conto ho $g_n(x) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\frac{x}{n}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^4} = \dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{x}{\frac{n^4+x^4}{n^4}} = \dfrac{n^2 x}{n^4+x^4}$

Si vede facilmente che $\displaystyle\max_{x\geq 0} \frac{n^2 x}{n^4+x^4} = \frac{\bar{y}}{n} \to 0$ se $n\to\infty$

In altri termini $\|g_n\|_\infty \to 0$ se $n\to\infty$, cioè $g_n \to 0$ UNIF. A ZERO

MA non posso scambiare limite con integrale. A CAUSA DEL FATTO CHE A è ILLIMITATO #

TORNIAMO AL

<u>Teorema</u> Se $f_n:[a,b]\to f$ convergono puntualmente $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se f_n sono C^1 e $f_n' \to g$ uniformemente ($g:[a,b]\to\mathbb{R}$)

ALLORA

- f è C^1
- $f' = g$
- <u>$f_n \to f$ uniformemente</u>

<u>Dim.</u> Fisso $x_0\in[a,b]$. Dato che f_n è C^1 ho:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(y)\,dy \qquad \forall x\in[a,b]$$

Forzo tendendo $n \to +\infty$ (x per x)

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(y)\,dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

CONV. PUNT. — CONV. PUNT. — CONV UNIF DI f'_n a g + teorema sullo scambio limite $\leftrightarrow$ integrale

Per il Teorema Fond. del Calcolo ne segue f è C^1 e $f' = g$. HO TROVATO I PRIMI DUE PUNT. PER IL TERZO osservo che, $\forall x \in [a,b]$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x_0) - f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (f'_n(y) - f'(y))\,dy$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int_a^b |f'_n(y) - f'(y)|\,dy \le$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| + (b-a)\|f'_n - f'\|_\infty \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \le |f_n(x_0) - f(x_0)| + (b-a)\|f'_n - f'\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

DUNQUE $f_n \to f$ UNIF. #

PASSIAMO ALLE SERIE di FUNZIONI.

È data una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ (f_n). VOGLIO DEFINIRE LA "SERIE DELLE f_n". PER QUESTO INTRODUCO LE "SOMME PARZIALI" $S_n : A \to \mathbb{R}^M$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

DICO CHE "LA SERIE DELLE f_n CONVERGE PUNTUALMENTE" SE esiste $S : A \to \mathbb{R}^M$ per cui $S_n \to S$ punt., cioè $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ $\forall x$

DICO CHE "LA SERIE DELLE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE" SE esiste S come sopra per cui $S_n \to S$ uniformemente.

DUNQUE "LA SERIE DELLE f_n" È LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI (S_n) definite come sopra. $\Leftrightarrow$

$$\sup_{x\in A}\Big|\underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k(x)}_{S_n(x)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)}_{S(x)}\Big| \longrightarrow 0 \quad \text{se } n\to\infty$$

Ricordo che la "somma della serie", cioè la $S(x)$ di cui sopra, si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

IL SIMBOLO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ indica un numero (a patto che la serie converga) o $+\infty$ se gli $a_n \geq 0$ e la serie diverge!
Se le somme parziali non hanno limite (serie indeterminata) allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ NON HA SENSO.
$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \text{ NON HA SENSO}\right)$

SPESSO PERÒ si usa $\sum_{1}^{\infty} a_n$ per indicare la succ. delle somme parziali e si dice "$\sum_{1}^{\infty} a_n$ CONVERGE / DIVERGE / INDETERMINATA"

Nel caso di serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ può convergere / divergere / essere indeterminata a seconda di come prendo $x \in A$.
PERCHÉ $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ abbia senso basta la convergenza puntuale

IL PROBLEMA DELLE SERIE È

(1) VEDERE PER QUALI x LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ esiste (è convergente / sommabile)

(2) Posto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (per le x in cui la serie è sommabile)

VEDERE se f è CONTINUA / DERIVABILE ...

CASO FORTUNATO: SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{0}^{\infty} A^n = \frac{1}{1-A} \qquad |A|<1$$

DIVERGE se $A\geq 1$, INDET. se $A \leq -1$

$$\Uparrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = \begin{cases} \dfrac{A^{n+1}-1}{A-1} & A\neq 1 \\ n+1 & A=1 \end{cases}$$

DI SOLITO NON HO "UNA FORMA CHIUSA" PER LE

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

Ogni teorema visto nelle succ. di funzioni ha un equivalente nelle serie. (basta applicare i vari teoremi a S_n)

Teoremi

(a) Se la serie delle f_n converge uniformemente su A $\Rightarrow$ serie delle f_n converge puntualmente su A

(b) Se la serie delle f_n converge uniformemente su A e se ogni f_n è continua su A $\Rightarrow$

$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$ è continua su A

(c) Se le $f_n : A \to \mathbb{R}$ e la serie conv. unif. A limitato e chiuso, f_n continue $\Rightarrow$

(sia f_n che f sono integrabili in quanto continue)

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\, dx$$

dim. $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, UNIFORME $\Rightarrow$

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \int_A f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A S_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\, dx$$

c'è un numero finito di addendi

(d) Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono C^1. Se la serie delle f_n è puntualmente convergente e se la serie delle f_n' è uniformemente convergente

$\Rightarrow \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ha senso ed è una funzione C^1

Inoltre

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

so che esiste

(La derivata della serie coincide con la serie delle derivate !)

C'È UN CRITERIO CHE MI PERMETTE DI TROVARE LA CONVERGENZA UNIFORME DELLA SERIE (senza dover calcolare la somma $\sum_1^{\infty} f_n(x)$).

CONVERGENZA TOTALE Dico che la serie delle f_n è "totalmente convergente" se la somma (numerica) $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ è convergente. Dato che ha una serie a termini positivi posso anche scrivere

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty}_{\text{questa somma infinita esiste e può essere } +\infty} < +\infty$$

A questa serie numerica posso applicare i vari criteri di convergenza per le serie a termini ≥ 0 (ANALISI 1)

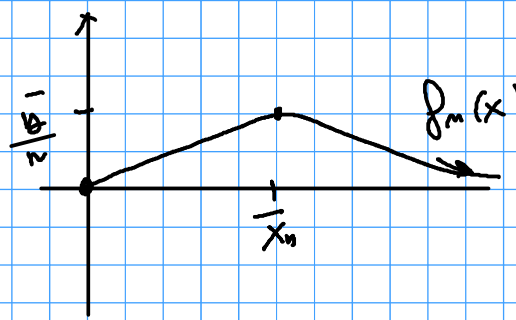
ESEMPIO (SOTTILE...) $f_n(x) = \frac{1}{n} h\left(\frac{x}{n}\right)$ (h è quella di prima) su $A = [0, +\infty]$

$$\frac{1}{n}\,\frac{x/n}{1+(x/n)^4} = \frac{1}{n^2}\,\frac{n^4 x}{n^4+x^4} = \boxed{\frac{n^2 x}{n^4+x^4}}$$

(abbiamo visto prima che $\|f_n\|_\infty \to 0$ se $n \to \infty$) VEDIAMO se la serie delle f_n converge totalmente, cioè se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$

Devo calcolare $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq 0} \frac{n^2 x}{n^4 + x^4}$ $\left(= \frac{\bar{y}}{n} \text{ ma rifaccio i cont.} \right)$

Cerco il grafico di $f_n(x)$. Vedo che $f_n(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$



Calcolo $f_n'(x) = \frac{n^2(n^4+x^4) - n^2 x (4x^3)}{(n^4+x^4)^2} =$

$\frac{n^6 - 3n^2 x^4}{(n^4+x^4)^2} = \frac{n^2}{(n^4+x^4)^2}(n^4 - 3x^4)$

$f_n'(x) = 0 \iff x = \bar{x}_n = \frac{n}{\sqrt[4]{3}}$

$f_n(\bar{x}_n) = \frac{(n/\sqrt[4]{3})\, n^2}{n^4 + n^4/3} = \frac{\frac{n^3}{\sqrt[4]{3}}}{\frac{4}{3} n^4} =$

$\frac{3^{3/4}}{4} \frac{1}{n} = \frac{\bar{y}}{n} = \bar{y}_n$

$\|f_n\|_\infty = \frac{\bar{y}}{n}$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ NON C'È CONVENZA TOTALE su $(0, +\infty)$

DUNQUE - ANCHE SE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n^4 + x^4}$ è ben definita

per ogni $x \geq 0$, NON SO SE C'È CONV. UNIFORME,

e dunque non so dire se f è continua !!

POSSO RAGIONARE IN MODO PIÙ SOTTILE - DATO CHE

LA CONTINUITÀ DI f in un punto x_0 dipende dal

comportamento di f nei punti vicini a x_0 !!

ALLORA POSSO CERCARE DI DIMOSTRARE LA CONV.
TOTALE ($\Rightarrow$ UNIFORME) IN UN INTERVALLO $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
con $\delta > 0$.

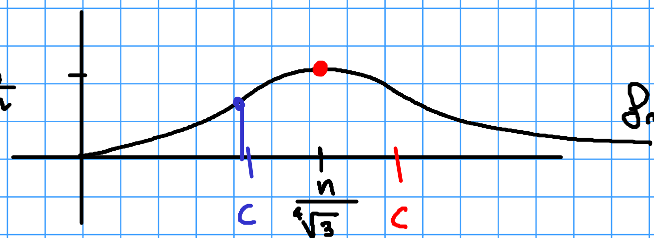
IN REALTÀ FACCIO UNA COSA LEGGERMENTE DIVERSA:

FISSO UN NUMERO $c>0$ (qualunque) e considero

$$\|f_n\|_{\infty,c} = \sup_{0\le x\le c}|f_n(x)| = \max_{0\le x\le c} \frac{n^2 x}{n^4+x^4} = \otimes$$

(Restringo le f_n all'intervallo $[0,c]$)

$$\otimes = \begin{cases} \dfrac{\overline{y}}{n} & \text{se } c \geq \dfrac{n}{\sqrt[4]{3}} \\[2ex] f_n(c) = \dfrac{n^2 c}{n^4+c^4} & \text{se } c \leq \dfrac{n}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$



$$\|f_n\|_{\infty,c} = \begin{cases} \dfrac{\overline{y}}{n} & \text{se } n \leq \sqrt[4]{3}\, c \\[2ex] \dfrac{n^2 c}{n^4+c^4} & \text{se } n \geq \sqrt[4]{3}\, c \end{cases}$$

Ma allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,c} = \underbrace{\sum_{n\leq \sqrt[4]{3}c} \frac{\overline{y}}{n}}_{\text{UN NUMERO FINITO DI ADDENDI}} + \underbrace{\sum_{n>\sqrt[4]{3}c} \frac{n^2 c}{n^4+c^4}}_{\text{SERIE CONVERGENTE perché } \leq \frac{c}{n^2}} < +\infty$$

HO TROVATO CHE la serie converge totalmente su $[0,c]$

$\Rightarrow$ converge uniformemente su $[0,c]$ $\Rightarrow$ $f(x)\big|_{[0,c]}$ è continua su $[0,c]$

Dato che c è arbitrario $\Rightarrow$ $f(x)$ è continua su ogni $x_0 \geq 0$

HO TROVATO DUNQUE CHE $f(x) = \sum \dfrac{n^2 x}{n^4+x^4}$ è

CONTINUA IN X !!