Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 38 26/02/2025

- Visto le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni
  $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $(A \subset \mathbb{R}^N)$
- Se $f_n \to f$ unif. si possono scambiare i limiti in n e in x
  ne segue che f_n continue $\Rightarrow f$ continua
- PROBLEMA: scambio dei limiti in n e integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx \underset{?!}{=} \int_A f(x)\,dx = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

La convergenza puntuale DA SOLA non permette di fare questo scambio. Per esempio se $f_n : \underbrace{(0,+\infty)}_{A} \to \mathbb{R}$ sono definite da $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^4x^4}$ $\left(= n\,h(nx) \text{ dove } h(t) = \dfrac{t}{1+t^4}\right)$

Si vede che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 x}{1+n^4x^4} = 0$ $\left(n^4 \text{ "VINCE" su } n^2\right)$

DUNQUE $f_n \to f$ dove $f(x) = 0 \ \forall x$

Però $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{nx}{1+(nx)^4}\, n\,dx$ $(y = nx,\ n\,dx = dy)$ $=$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\,dy$ = numero reale > 0 $\left(\text{noto che } \dfrac{y}{1+y^4} \simeq \dfrac{1}{y^3} \text{ per } y\to\infty \Rightarrow \text{l'integrale converge}\right)$

Dunque $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\,dy > 0$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

NON SI SCAMBIA LIMITE CON INTEGRALE

SE INVECE HO LA CONV. UNIF. E SE A è limitato lo caso funziona.

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}^N$ A limitato e chiuso. $f_n : A \to \mathbb{R}$ funzioni continue ($\Rightarrow$ sono tutte integrabili su A). Supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente ($\Rightarrow f$ è continua, dunque integrabile su A). ALLORA

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

è il $\sup_{y\in A} |f_n(y)-f(y)|$

Dim. Sia $x \in A$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$f_n(x) = f_n(x) - f(x) + f(x) \le f(x) + |f_n(x)-f(x)| \le f(x) + \|f_n - f\|_\infty$$

x particolare

Analogamente $f_n(x) \ge f(x) - \|f_n - f\|_\infty$, dunque

$$-\|f_n-f\|_\infty + f(x) \le f_n(x) \le f(x) + \|f_n - f\|_\infty$$

costante in x

$\int_A \|f_n-f\|_\infty dx$

Se integro su A ottengo

$$-|A|\,\|f_n-f\|_\infty + \int_A f(x)\,dx \le \int_A f_n(x)\,dx \le \int_A f(x)\,dx + |A|\,\|f_n-f\|_\infty$$

dove $|A|$ indica la misura di A. Se $n\to\infty$ si ha $\|f_n-f\|_\infty \to 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

DUNQUE L'INTEGRAZIONE SU UN DOMINIO LIMITATO

VA D'ACCORDO CON LA CONV. UNIFORME

SE A è ILLIMITATO LA COSA CONTINUA A NON FUNZIONARE — SI PUò TROVARE UN CONTROESEMPIO

ALTRO PROBLEMA: Se $f_n \to f$ (in qualche senso)

se f_n sono derivabili ? POSSO DIRE ? che

f è derivabile e che $f_n' \to f'$ (sempre in qualche senso...)

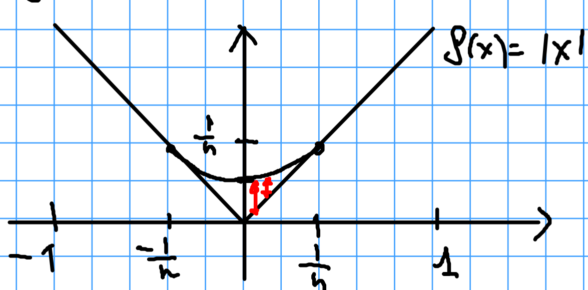
IN REALTÀ NEANCHE LA CONV. UNIF. VA BENE IN QUESTO CASO.

Vediamo che è possibile trovare delle f_n derivabili che tendono unif. a una f MA con

(a) f non derivabile

OPPURE (b) f derivabile ma $f_n' \not\to f'$

<u>PRIMO CONTROESEMPIO</u> Approssimo $f(x) = |x|$ mediante funzioni derivabili:



Dato n considero $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ a_n x^2 + b_n & \text{se } |x| \leq 1/n \end{cases}$$

dove a_n e b_n sono scelti in modo che $f_n(1/n) = 1/n$

e $f_n'(1/n) = 1$ (per simmetria $f(-1/n) = 1/n$ e $f'(-1/n) = -1$)

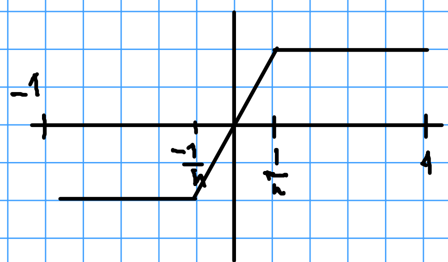
Vediamo se è possibile trovare a_n e b_n

$$\begin{cases} a_n \frac{1}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \\ 2a_n \frac{1}{n} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2n} + b_n = \frac{1}{n} \\ a_n = \frac{n}{2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{n}{2} \\ b_n &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

DUNQUE

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq 1/n \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq 1/n \end{cases}$$

Per costruzione f_n è C^1 (perché in $x = \pm\frac{1}{n}$ le derivate si "raccordano")



DICO CHE $f_n \to f$ $\quad (f(x) = |x|)$

UNIFORMEMENTE. INFATTI

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$\sup_{-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| f_n(x) - |x| \right| =$$

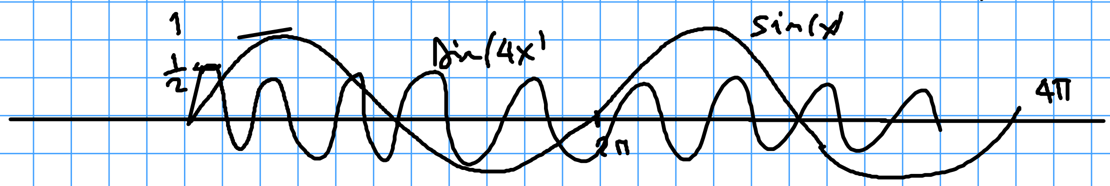
$$\sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} - x \right|$$ ← si vede facilmente che il massimo si ottiene in $x=0$

$$= \frac{1}{2n}$$

DUNQUE $\|f_n - f\| = \frac{1}{n} \to 0$, cioè $f_n \to f$ UNIF.

MA f NON È DERIVABILE IN $x = 0$!!

ALTRO CONTROESEMPIO: $\quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$

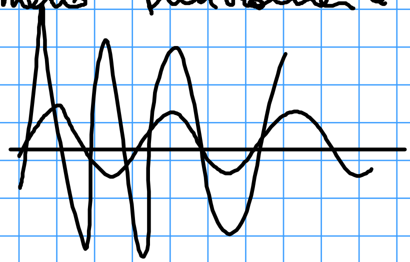


È chiaro che $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$. DUNQUE $f_n \to 0$ UNIF.

Però $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$ $\qquad \|f_n'\|_\infty = n$

SICURAMENTE $f_n' \not\to 0$ UNIF.

SI VEDE - CON UN PO' DI PAZIENZA - CHE NON PUÒ tendere nemmeno puntualmente a zero



SI PUÒ PERÒ TROVARE UN TEOREMA SULLE DERIVATE

TEOREMA Supponiamo che $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ siano di classe C^1. Supponiamo che:

$$f_n \to f \text{ puntualmente} \quad , \quad f_n' \to g \text{ uniformemente}$$

(dove $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ - sicuramente g è continua)

ALLORA

- f è C^1
- $f' = g$ $\qquad \left(\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$
- $f_n \to f$ uniformemente