Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 37 24/02/2025

Successioni e Serie di funzioni

È data una "successione di funzioni" cioè

$\forall n$ abbiamo una $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad (\forall x \in A$ ho $f_n(x) \in \mathbb{R}^M)$

Voglio dare una nozione di convergenza delle f_n a una f (con $f: A \to \mathbb{R}^M$).

Def. (convergenza puntuale). Dico che le f_n convergono puntualmente a f su A se

$$\forall x \in A \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

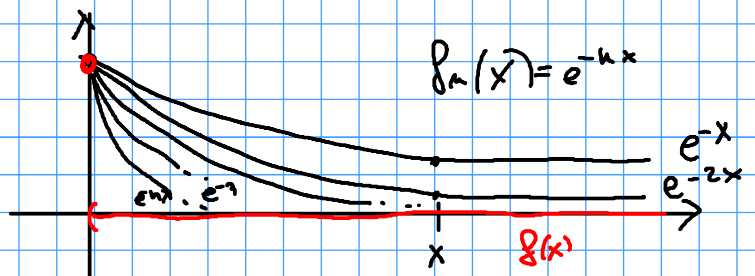
in altri termini FISSATO x ho $f_n(x) \to f(x)$ IN $\mathbb{R}^M$

$\iff$ FISSATO x $\quad \| f_n(x) - f(x) \|_{\mathbb{R}^M} \to 0$

Questa nozione PURTROPPO - per quanto semplice - ha dei difetti

ESEMPIO $\quad f_n(x) = e^{-nx} \quad A = [0, +\infty[\quad (M=1)$

$(f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R})$



DOMANDA: f_n converge puntualmente a qualcosa ??

Se fisso x
$$\begin{cases} x > 0 & e^{-nx} \to 0 \\ x = 0 & e^{-n0} = 1 \to 1 \end{cases}$$
DUNQUE $f_n \to f$ punt. dove $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

In questo caso dunque f_n è una succ. di funzioni continue che converge punt. a una funzione discontinua

LA CONV. PUNTUALE NON CONSERVA LA CONTINUITÀ

CI SERVIRÀ UNA NOZIONE <u>PIÙ FORTE</u> DI CONVERGENZA SULLE FUNZIONI.

Definisco prima la "NORMA UNIFORME"

<u>DEF.</u> Data $f: A \to \mathbb{R}^M$ pongo

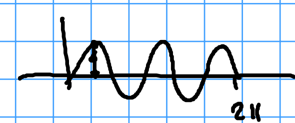
$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^M}$$

(di solito $M=1$ dunque $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^M} = |f(x)|$)

($\|f\|_\infty$ può anche essere $+\infty$)

Per esempio se $f(x) = \sin(2x)$ e $A = [0, 2\pi]$ $\Rightarrow$

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 2\pi} |\sin(2x)| = 1$$

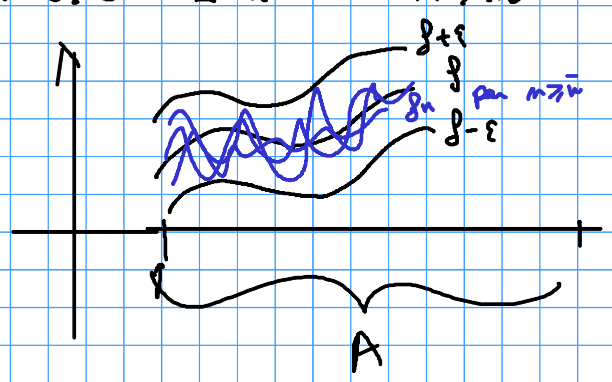


<u>DEF.</u> Dico che f_n tende a f uniformemente se

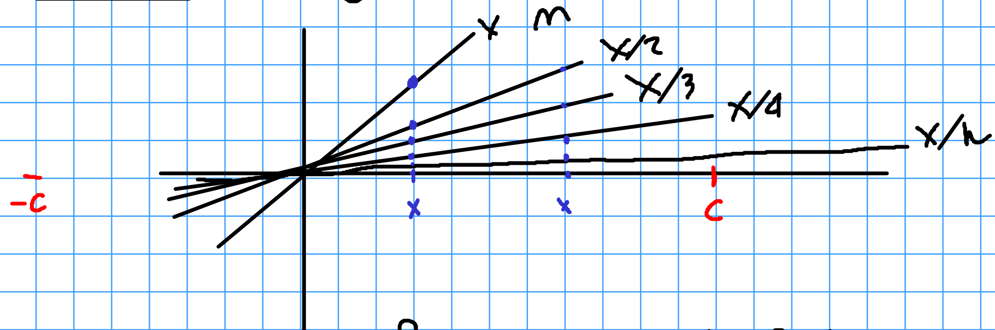
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^M} = 0$$

IN ALTRI TERMINI deve succedere che – NEL CASO $M=1$ –

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \ge \bar{n} \quad f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A$$



<u>ESEMPIO</u> $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ $A = \mathbb{R}$



DICO CHE $f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbb{R}$ (0 è la funzione nulla)

INFATTI a fisso x ho $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$

Se calcolo $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = +\infty$ (prendo $|x|$ grande quanto mi pare...)

($\|f_n\|_\infty$ NON TENDE A ZERO)

DUNQUE <u>NON È VERO</u> CHE $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE

~ $f(x)=x$ $g(x)=0$ hanno "distanza infinita tra loro"

<u>PERÒ</u> se mi metto su un limitato, per esempio su $A=[-C,C]$ (qualunque sia M) ho

$$\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{-C\le x\le C} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{C}{n}$$

e adesso $\|f_n\|_{\infty,A} = \frac{M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

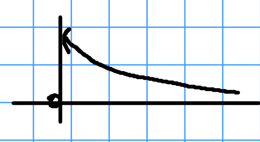
DUNQUE f_n TENDONO A ZERO UNIFORMEMENTE su $[-C,C]$ ma non tendono a zero UNIF. su $\mathbb{R}$.

<u>OSS.</u> TORNIAMO AL PRIMO ESEMPIO $f_n(x)= e^{-nx}$ $A=[0,+\infty[$

e $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$. Calcoliamo $\|f_n-f\|_\infty$ cioè

$$\sup_{x\ge0}\left|e^{-nx}-f(x)\right| = \sup_{x>0}\left|e^{-nx}-0\right| = \sup_{x>0} e^{-nx} = 1$$

(perché $\lim_{x\to0^+} e^{-nx} = e^0 = 1$)



DUNQUE $\|f_n - f\|_\infty = 1$ $\forall n$ DUNQUE $\cancel{f_n \to f \text{ UNIF}}$

<u>PROPRIETÀ</u> Se $f_n\to f$ UNIF. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ PUNT.

<u>Dim</u> Supponiamo che $f_n\to f$ UNIF. Allora

$$\sup_{x\in A}\|f_n(x)-f(x)\|_{\mathbb{R}^m}\to0$$

MA se fisso un qualunque x_0 in A ho

$$0\le\|f_n(x_0)-f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m}\le\sup_{x\in A}\|f_n(x)-f(x)\|\to0$$

e quindi $\forall x_0 \in A$ $\quad \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^M} \to 0$, cioè $f_n(x_0) \to f(x_0)$

CONV. UNIF $\Rightarrow$ CONV. PT.

. IL LIMITE PUNTUALE <u>INDIVIDUA</u> il candidato limite uniforme.

DUNQUE SE VOGLIO SAPERE SE UNA (f_n) converge unif o qualcosa, prima cerco il limite puntuale f e poi cerco di capire se $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

<u>TEOREMA</u> C Se f_n sono funzioni continue e $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE allora f è CONTINUA.

IN REALTÀ C'È UNA VERSIONE PIÙ FORTE

<u>TEOREMA</u> C^* Supponiamo che $f_n : A \to \mathbb{R}^M$. Supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione per A.

Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}^M$ sia tale che

$$f_n \to f \text{ UNIF. su } A, \quad \forall n \text{ esiste } \ell_n := \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

ALLORA

(1) esiste $\ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n$

(2) si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(POSSO SCAMBIARE I LIMITI !!

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \text{)}$$

NON DIMOSTRIAMO QUESTO TEOREMA -

VEDIAMO CHE $C^* \Rightarrow C$. INFATTI, NEL CASO $x_0 \in A$ e f_n CONTINUE, si ha $\ell_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$

Per il teorema C^* $\quad \exists\, \ell = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$ e $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Ma, dato che $x_0 \in A$, $\ell = f(x_0)$ (perché $f_n(x_0) \to f(x_0)$)

DUNQUE $f_n \to f$ UNIF. $\quad f_n$ continue in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

- $f_n \to f$ UNIF. f_n CONTINUE $\Rightarrow$ f CONTINUA

PIÙ IN GENERALE se $f_n \to f$ posso scambiare i limiti in x e in n.

ESEMPIO Nel caso $f_n(x) = \frac{x}{n}$ posso notare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \quad \forall x \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq$$

VICEVERSA $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} +\infty = +\infty$

DUNQUE NON PUÒ ESSERCI CONV. UNIF.

(FAREMO PIÙ AVANTI DEGLI ESEMPI INTERESSANTI DI SCAMBI DI LIMITE CHE FUNZIONANO)

- CONVERGENZE E INTEGRALI. Per semplicità $N=1$

$A \subset \mathbb{R}^N$ insieme misurabile $f_n : A \to \mathbb{R}$

f_n integrabili su A, $f_n \to f$ (in qualche senso ...)

MI CHIEDO se f è integrabile su A e se $\int_A f_n(x)\,dx \to \int_A f(x)\,dx$

IN ALTRI TERMINI VORREI "SCAMBIARE INTEGRALE E LIMITE":

$$\textcircled{\Rightarrow} \quad \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx \qquad ??$$

LA $\textcircled{\Rightarrow}$ può essere falsa. Per esempio $A = (0, +\infty)$

e $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^4}$. VEDO che $f_n(x) \to 0 \quad \forall x > 0$

DUNQUE $f_n \to 0$ PUNTUALMENTE. VEDIAMO se posso integrare su $(0,+\infty)$. Devo fare

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+nx^4}\,dx$$ FACCIO UNA SOSTITUZIONE: $nx^4 = y^4$

$\iff y = n^{1/4} x \iff x = y\, n^{-1/4}$ $\quad dx = \frac{dy}{n^{1/4}}$

$$\parallel$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \cdot n^{-1/4}}{1+y^4}\, n^{-1/4}\, dy = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\, dy$$

L'INTEGRALE $\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\, dy$ è finito perché l'integrando è di ordine $\frac{1}{y^3}$ se $y \to +\infty$ e $\frac{1}{y^3}$ è integrabile all'infinito

QUINDI $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+nx^4}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\,dy$

$= 0$

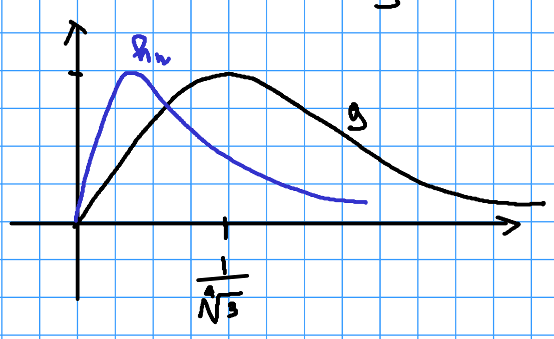
IN QUESTO CASO LO SCAMBIO DI LIMITI FUNZIONA

(perché $f_n \to 0$ e $\int_0^{+\infty} 0\, dx = 0$)

VEDIAMO SE MODIFICANDO L'ESEMPIO POSSIAMO COSTRUIRE UN CASO IN CUI LO SCAMBIO DI LIMITI NON FUNZIONA.

PARTIAMO DA $g(x) = \frac{x}{1+x^4}$. QUESTA g è integrabile su $(0, +\infty)$ perché $g(x) \simeq \frac{1}{x^3}$ se $x \to +\infty$

IL GRAFICO DI g è il seguente



$g(0) = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$$g'(x) = \frac{1+x^4 - x(4x^3)}{(1+x^4)^2} = \frac{1-3x^4}{(\quad)^2}$$

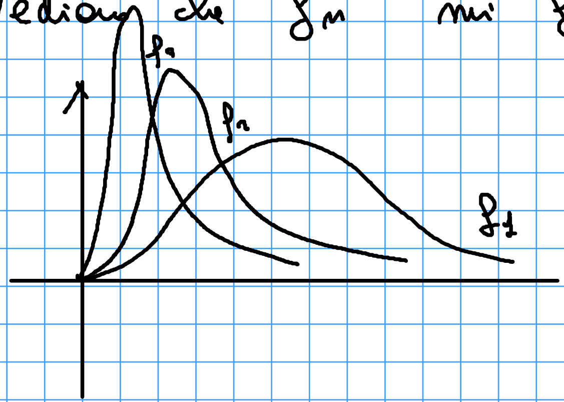
A partire da g considero $h_n(x) = g(nx)$

Calcoliamo $\int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(nx)\,dx =$ $\qquad y = nx$, $x = y/n$

$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} g(y)\,dy$

Allora definisco $f_n(x) := n\,h_n(x) = n\,g(nx) = \boxed{\dfrac{n^2 x}{1+n^4x^4}}$

Vediamo che f_n mi fa fallire lo scambio di limiti



Se fisso $x>0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4x^4} = 0$$

n^4 VINCE SU n^2 !!

Se calcolo $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\overbrace{nx}^{y}\,n\,dx}{1+\underbrace{(nx)^4}_{y}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^4}\,dy$

$y = nx \Rightarrow dy = n\,dx$

IN SOSTANZA tutte le f_n hanno lo stesso integrale $I>0$, che per $n\to\infty$ "si schiaccia" sull'asse y e "sparisce" a $n=+\infty$"

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x) = I = \int_0^{+\infty}\frac{y}{1+y^4}\,dy$$

$$\neq$$

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$$