Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 35 10/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

• FUNZIONI MISURABILI / INTEGRABILI SU UN INSIEME

__Def.__ $A \subset \mathbb{R}^N$ $f : A \to [-\infty, +\infty]$.

Consideriamo $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ che vale

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Diremo che (1) f è misurabile su A se $\tilde{f}$ è misurabile

(2) f è integrabile su A se $\tilde{f}$ è integrabile —

in questo caso definiamo l'integrale di f su A:

$$\int_A f = \int_A f(x)\,dx =: \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\,dx$$

__OSS.__ Se considero $f(x) = 1$ per $x \in A$, allora la $\tilde{f}$ introdotta sopra si chiama "funzione caratteristica di A" e la indichiamo con $\mathbb{1}_A$. In sostanza $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}$ e

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

SI VEDE FACILMENTE CHE

$\mathbb{1}_A$ è misurabile $\Leftrightarrow$ A è misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A = \int_A 1\,dx = m(A) \quad (\text{nel caso di } A \in \mathcal{M})$$

ULTIME PROPRIETÀ

- Se f è continua su $\mathbb{R}^N \Rightarrow f$ è misurabile su $\mathbb{R}^N$
- Se f è continua su A, A è compatto $\Rightarrow f$ è integrabile su A

(+ GENERALE) Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua su A $\Rightarrow \forall B \subset A$ B compatto f è integrabile su B

- Confronto con Riemann. (a) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann $\Rightarrow f$ è integrabile e i due integrali coincidono

(b) Se $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $\boxed{f \geq 0}$ f è integrabile IN SENSO IMPROPRIO SECONDO RIEMANN su A $\Rightarrow$ f è INTEGRABILE SU A E GLI INTEGRALI COINCIDONO

Ne segue che la tesi è vera anche se f è $\boxed{\text{ASSOLUTAMENTE}}$ INTEGRABILE IN S. IMPR. SECONDO $\mathcal{R}$.

(c) Se f è int. in senso improprio ma NON ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow f$ NON è integrabile (è conseguenza della def. fatta all'inizio per cui f è integrabile $\Leftrightarrow$ f^+ e f^- hanno integrale finito)

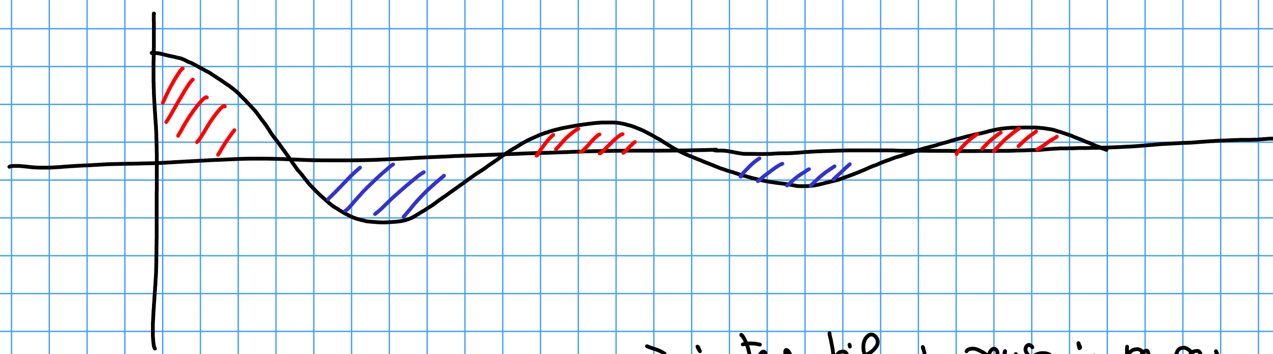
Per esempio $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $(f(0) = 1)$ è integrabile in senso improprio secondo $\mathcal{R}$. su $[0,+\infty[$. Questo equivale a dire che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad \text{esiste finito}$$

$$\| \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \leftarrow \text{SECONDO Riemann (improprio)}$$

MA QUESTO INTEGRALE NON ESISTE per Lebesgue perché dovrebbe essere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{dx}\, dx = \underbrace{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^+ dx}_{+\infty} - \underbrace{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^- dx}_{+\infty}$$



DUNQUE $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- è integrabile in senso improprio secondo Riemann su $[0,+\infty[$
- NON È INTEGRABILE secondo Lebesgue su $[0,+\infty[$

INTEGRALI ITERATI

Teorema (TONELLI / FUBINI) Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$, misurabile.

Scrivo $f(x,y)$ con $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$

CASO 1: TONELLI Se $f \geq 0$ allora

(a) Per quasi ogni x la funzione $y \mapsto f(x,y)$ (da $\mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$) è misurabile su $\mathbb{R}^M$;

(b) A causa di (a), per q.o. x in $\mathbb{R}^N$, posso considerare la funzione

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\, dy$$

Se estendo come mi pare questa funzione a tutto $\mathbb{R}^N$, questa è misurabile

(c) A causa di (b) posso integrare in x. SI HA

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy}_{\substack{\text{definito come mi pare nelle}\\ x \text{ in cui } \int f(x,y)dy \\ \text{non esiste}}} \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dx\,dy$$

PUÒ ESSERE $+\infty$

CASO 2: FUBINI   Se f è integrabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

(a) Per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^M$

(b) La funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ (definita come mi pare nelle x in cui non vale (a)) è integrabile

(c) $$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dx\,dy \quad (\in \mathbb{R}!!)$$

ITERANDO QUESTI TEOREMI SI PASSA DA UN INT. SU $\mathbb{R}^N$ A N INTEGRALI SU $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1..x_N)\,dx_1..dx_N = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} .. \int_{\mathbb{R}} f(x_1..x_N)\,dx_N\Big)dx_{N-1} .. dx_1$$

OSS. 1   Se valgono le ipotesi di FUBINI/TONELLI $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx \Big) dy$$

perché sono entrambi uguali a $\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M} f$

OSS. 2   Il t. di Fubini necessita dell'ipotesi f integrabile. Questa ipotesi equivale a $|f|$ integrabile. Dato che $|f| \geq 0$ per trovare se $|f|$ è integrabile posso usare Tonelli!!

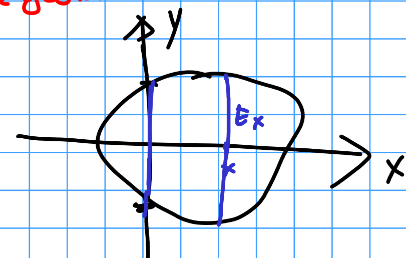
Infatti se $\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^M}|f(x,y)|\,dy\right)dx < +\infty \iff$

$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M} f < +\infty$ cioè f integrabile su $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M$

AMMESSO CHE f sia misurabile su $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M$ – per es. f continua

ATTENZIONE: PRIMA DI CALCOLARE L'INTEGRALE BISOGNA SAPERE CHE f è integrabile

CONSEGUENZA Sia $E \subset \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M$
E misurabile



Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ considero $E_x = \{y \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E\}$

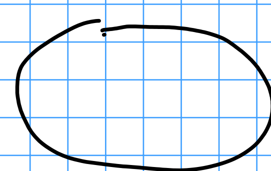
Allora (da Tonelli):

(a) Per q.o. x E_x è misurabile in $\mathbb{R}^M$

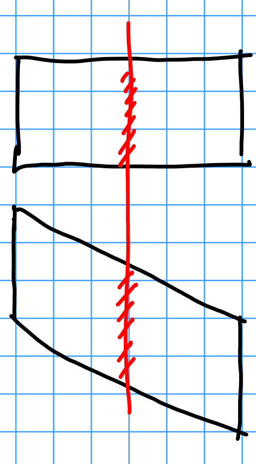
(b) $x \to m(E_x)$ è misurabile (definita come voglio nelle x in cui E_x non è mis.)

(c) $$\int_{\mathbb{R}^N} m(E_x)\,dx = m_{N+M}(E)$$

($m(E)$ = integrale della misura delle sezioni)



$\Longrightarrow$



stessa misura di ogni sezione $\Rightarrow$
stessa area / volume ...

ESEMPIO AREA DEL CERCHIO .. $E = \{x^2+y^2 \le R^2\}$

Se fisso $x \in \mathbb{R}$

$$E_x = \begin{cases} [-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}], & \text{se } |x| \le R \\ \phi & \text{se } |x| > R \end{cases}$$

(dato x $\quad x^2+y^2 \le R^2 \iff y^2 \le R^2-x^2 \iff |y| \le \sqrt{R^2-x^2}$

DUNQUE

$$m(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(E_x)\,dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

uso $x = R\sin\theta \Rightarrow dx = R\cos\theta \Rightarrow$

$$m(E) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2-R^2\sin^2\theta}\; R\cos\theta = 4R^2\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\,d\theta =$$

$$4R^2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta = 4R^2\Big[\underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}}_{=0} + \frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} =$$

πR^2

VOLUME DEL DISCO TRIDIMENSIONALE $\quad E = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

$x \in \mathbb{R}$ considero la sezione $E_x \subset \mathbb{R}^2$

$$E_x = \begin{cases} y^2+z^2 \le R^2-x^2 & |x| \le R \\ \phi & |x| > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow m(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(E_x)\,dx = \int_{-R}^{R} m(E_x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)\,dx = 2\pi\Big[R^2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^R = 2\pi\Big(\underbrace{R^3 - \frac{R^3}{3}}_{\frac{2R^3}{3}}\Big) =$$

$\frac{4\pi}{3}R^3$

FACCIAMO ANCHE L'ALTRA FORMULA IMPORTANTE

TEOREMA (CAMBIO DI VARIABILE)

Ω, Ω_1 due aperti di $\mathbb{R}^N$, $\Phi: \Omega \to \Omega$ BIGETTIVA di classe C^1. Allora.

(1) Se $f : \Omega_1 \to [0,+\infty]$, misurabile ($f \geq 0$!!) $\Rightarrow$

$f \circ \phi \, |\det J_\phi|$ (da $\Omega \to [0,+\infty]$) è misurabile e

$$(\star) \quad \int_{\Omega_1} f(y)\,dy = \int_{\Omega} f(\phi(x))\,|\det J_\phi(x)|\,dx \qquad (\in [0,+\infty])$$

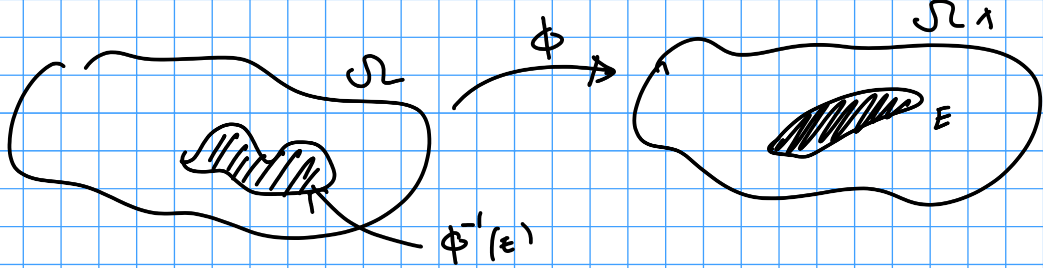
(2) Se $f : \Omega_1 \to [-\infty,+\infty]$, INTEGRABILE $\Rightarrow$

$f \circ \phi \, |\det J_\phi|$ è integrabile e vale $(\star)$ $\quad (\in \mathbb{R})$

Per esempio se $E \subset \Omega_1$ è misurabile, prendo $f = \mathbb{1}_E$ (mis., ≥ 0)

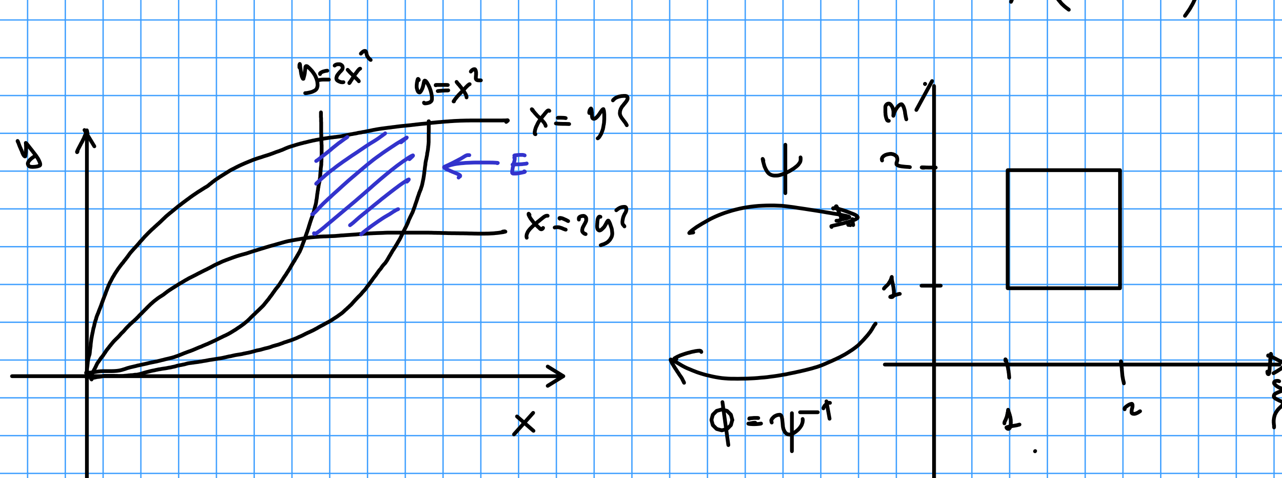
$$m(E) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(\phi(x))\,|\det J_\phi(x)|\,dx = \int_{\phi^{-1}(E)} |\det J_\phi(x)|\,dx$$

$$\left(\mathbb{1}_E(\phi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi(x) \in E \\ 0 & \text{se } \phi(x) \notin E \end{cases} = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(E)} \right)$$



ESEMPIO Considero $E \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$E = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2x^2, \quad y^2 \leq x \leq 2y^2, \quad (x > 0)\}$$



Vorrei calcolare l'area di E, cioè $m(E)$ (in $\mathbb{R}^2$)

IDEA: INTRODURRE DUE VARIABILI ξ, η def. da

$$\xi = \frac{y}{x^2} \qquad \eta = \frac{x}{y^2} \qquad \leftarrow \left(E \text{ è caratterizzato da } \begin{array}{l} 1 \le \xi \le 2 \\ 1 \le \eta \le 2 \end{array} \right)$$

Vediamo come usiamo ξ ed η. INTANTO CHIAMO

$\Psi(x,y)$ la funzione $\psi(x,y) = \begin{pmatrix} y/x^2 \\ x/y^2 \end{pmatrix}$ su $\{x>0, y>0\}$

$\psi : \{x>0, y>0\} \to \{x>0, y>0\}$. ψ è C^1 ??

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2y\,x^{-3} \\ y^{-2} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} x^{-2} \\ -2x\,y^{-3} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ sono continue in $\Omega^{++} = \{x>0, y>0\}$

dunque ψ è C^1. Se uso questa ψ nella formula di cambio di variabile $\left((\xi, \eta) = \psi(x,y) \right)$

$$\iint_{O} f(\xi,\eta) = \iint_{O} f(\psi(x,y)) \, |\det J_\psi(x,y)| \, dx\,dy$$

NON MI SERVE PERCHÉ E sto cercando

MI SERVE $\phi := \psi^{-1}(\xi, \eta)$. Infatti se uso ϕ nel teorema

$$m(E) = \iint_{\Omega^{++}} \underbrace{f(x,y)}_{\mathbb{1}_E} \, dx\,dy = \iint_{\Omega^{++}} \underset{\mathbb{1}_E}{f}(\phi(\xi,\eta)) \, |\det J_\phi(\xi,\eta)| \, d\xi\,d\eta$$

$$= \iint_{\phi^{-1}(E)} |\det J_\phi(\xi,\eta)| = \int_1^2 \int_1^2 \det J_\phi(\xi,\eta)$$

DUNQUE DEVO CALCOLARE $\psi^{-1}(\xi,\eta)$. cioè dati (ξ,η) devo risolvere in Ω^{++}

$$\begin{cases} \frac{y}{x^2} = \xi \\ \frac{x}{y^2} = \eta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y}{\eta^2 y^4} = \xi \\ x = \eta y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y^3 = \frac{1}{\xi \eta^2} \\ x = \eta y^2 \end{cases}$$

$$y = \xi^{-1/3}\eta^{-2/3} \qquad x = \eta\,\xi^{-2/3}\eta^{-4/3} = \xi^{-2/3}\eta^{-1/3}$$

$$\phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi^{-2/3}\eta^{-1/3} \\ \xi^{-1/3}\eta^{-2/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J_\phi(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\xi^{-5/3}\eta^{-1/3} \, , & -\frac{1}{3}\xi^{-2/3}\eta^{-4/3} \\ -\frac{1}{3}\xi^{-4/3}\eta^{-2/3} \, , & -\frac{2}{3}\xi^{-1/3}\eta^{-5/3} \end{bmatrix}$$

$$\det J_\phi(\xi,\eta) = \frac{4}{9}\xi^{-2}\eta^{-2} - \frac{1}{9}\xi^{-2}\eta^{-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\xi^2\eta^2}$$

USANDO IL CAMBIO DI VAR.

$$\int_{\Omega_1} f(y)\,d\underset{(x,y)}{y} = \int_{\Omega} f(\phi(x))\,|\det J_\phi(x)|\,d\underset{(\xi,\eta)}{x}$$

$$\boxed{f(x,y) = \mathbb{1}_E} \qquad f(\phi(\xi,\eta)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi(\xi,\eta)\in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(E)} = \mathbb{1}_{\psi(E)}$$

$$m(E) = \iint_E 1\,dy = \iint_{\psi(E)} |\det J_\phi(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta = \iint_{[1,2]\times[1,2]} \frac{1}{3}\frac{1}{\xi^2}\frac{1}{\eta^2}\,d\xi\,d\eta$$

USO FUBINI (TONELLI) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_1^2 \frac{1}{3}\frac{1}{\xi^2}\frac{1}{\eta^2}\,d\eta\right)d\xi =$

$$\frac{1}{3}\left(\int_1^2\frac{d\xi}{\xi^2}\right)\left(\int_1^2\frac{d\eta}{\eta^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\int_1^2\frac{d\xi}{\xi^2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{\xi}\right]_1^{2\;2} =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 \qquad \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

<u>ESERCIZIO</u> CALCOLARE (SE ESISTE), al variare di $\alpha > 0$

$$\iiint_D \frac{z}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy\,dz$$

dove $D = \left\{ 0 \le z \le 1 \quad x^2+y^2 \le \frac{1}{z^2} \right\}$

NOTO CHE $f(x,y,z) := \frac{z}{(x^2+y^2)^2}$ è continua tranne che

nell'insieme $\{x^2+y^2=0\}$ = asse z . LA POSSO CONSIDERARE

$+\infty$ su questi punti - se voglio . IN OGNI CASO $f \geq 0$

FATTI L'asse z è trascurabile in $\mathbb{R}^3$

POSSO DARE PER BUONO CHE $\boxed{\text{se } X \subset \mathbb{R}^N \quad X \text{ è un sottospazio di dimensione } < N \Rightarrow m(X)=0}$

Nel caso dell'asse z lo ricavo da Tonelli: $E = \{\text{asse } z\}$

$$m(E) = \iiint \mathbb{1}_E \, dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy = \otimes$$

se guardo l'integrale interno

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x,y,z)\,dz = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_E(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\otimes = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{dove } g(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $\{(0,0)\}$ è trascurabile $\Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g = 0$

FATTO (Generalizzazione..)

Se f è continua TRANNE CHE SU X trascurabile

$\Rightarrow f$ è misurabile

$\Rightarrow \frac{z}{(x^2+y^2)^2}$ è misurabile , ≥ 0 POSSO USARE TONELLI

$$\iiint_D \frac{z}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,dz =$$

CONTINUIAMO DOMANI