Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 34 09/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEORIA DELLA MISURA / INTEGRALE

- ABBIAMO DEFINITO (1) una classe $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, detti <u>misurabili</u> e una funzione, detta <u>misura</u> (secondo Lebesgue)

$\forall A \in \mathcal{M}$ si può fare $m(A)$

- $m(A) \geq 0$, anche $+\infty$

- Ricordiamo le proprietà della misura e dei misurabili

- <u>MONOTONIA</u> $A \subset B$ (in $\mathcal{M}$) $m(A) \leq m(B)$

- Se $R$ è un rettangolo $R \in \mathcal{M}$ $m(R) = |R|$ = "prodotto delle lunghezze dei lati"

E POI

(in particolare $\mathbb{R}^N$ e $\emptyset$ sono mis.

$m(\mathbb{R}^N) = +\infty$ $m(\emptyset) = 0$

Riepilogo (e integrazione). $\mathcal{M}$ = {insiemi misurabili}

- UNIONE E INTERSEZIONE NUMERABILE di insiemi misurabili è misurabile: se $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$ allora $(n \in \mathbb{N})$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M} \quad , \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$$

INOLTRE, se $A_n \in \mathcal{M}$ si ha (subadditività)

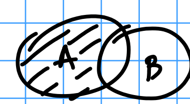
$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \; ;$$

(additività)

se $A_n \cap A_m = \emptyset$ quando $n \neq m \Rightarrow m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

- DIFFERENZA di misurabili è misurabile

$$A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$$



$A \setminus B$

- Se $A$ è aperto / $A$ è chiuso $\Rightarrow$ $A$ è misurabile
  ($A$ chiuso $\Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus A$ è aperto)
- Se $A$ è limitato ed è Riemann-misurabile $\Rightarrow$ $A$ è misurabile e $m_{\mathcal{L}}(A) = m_R(A)$ (possono però esistere misurabili, non misurabili per Riemann, per es $\mathbb{Q} \cap [0,1]$)
- Se $m^*(A) = 0$ ( $A$ trascurabile) $\Rightarrow$ $A$ è misurabile
- Se $A$ è misurabile e $\underbrace{(B\setminus A) \cup (A \setminus B)}_{A \Delta B \text{ (diff. simmetrica)}}$ è trascurabile allora $B$ è misurabile


$A\Delta B$

- Se $A_n$ sono misurabili e $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

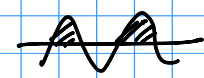
$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

- Se $A_n$ sono misurabili, $A_{n+1} \subset A_n$, $m(A_1) < +\infty \Rightarrow$

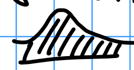
$$m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

## FUNZIONI MISURABILI su $\mathbb{R}^N$

$f: \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$. PONGO $G^-(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 \le y \le f(x)\}$



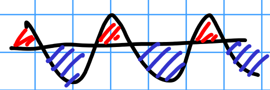
- Se $f \ge 0$ dico che <u>$f$ è MISURABILE</u> se $G^-(f) \in \mathcal{M}$
- Se $f \ge 0$ è misurabile chiamo "integrale di $f$" (su $\mathbb{R}^N$) il numero



$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx =: m_{N+1}\left(G^-(f)\right) \in [0, +\infty]$$

$0 \le$, PUÒ FARE $+\infty$

- Nel caso generale dico che <u>$f$ è misurabile</u> se $f^+$ e $f^-$ sono misurabili:



- Dico che <u>$f$ è integrabile (su $\mathbb{R}^N$)</u> se $f$ è misurabile e se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx < +\infty \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx < +\infty$$

In tal caso definisco <u>l'integrale di $f$</u> (su $\mathbb{R}^N$) come il numero reale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int_{\mathbb{R}^N} f^- \in ]-\infty, +\infty[$$

NB PUÒ SUCCEDERE CHE $f$ abbia integrale, ma non sia integrabile: QUESTO ACCADE SE $f \ge 0$, misurabile $\int_{\mathbb{R}^N} f = +\infty$

SE $f$ non è $\ge 0$ NON HA SENSO CONSIDERARE $\int_{\mathbb{R}^N} f$, a meno che questo non sia finito

DUNQUE, NEL CASO DI $f \ge 0$ misurabile

<u>SOLO SE $f \ge 0$</u>

$$f \text{ integrabile} \iff \int_{\mathbb{R}^N} f < +\infty$$

Anche per le funzioni ci sono un po' di proprietà che elenco senza dim.

(1) (LINEARITÀ) $f, g$ misurabili $\Rightarrow f + g$ misurabile A PATTO CHE $f + g$ sia DEFINITA. Sicuramente se $f, g \ge 0$ se

no devo essere sicuro di non trovo $+\infty - \infty$

RICORDIAMO che sto ammettendo funzioni con valori infiniti, dunque $f(x) = +\infty \ \forall x$ è lecita ed è misurabile (il suo $G^-(f)$ è $\{(x,y): x \in \mathbb{R}^N, y \geq 0\}$ che è mis.)

Anche $g(x) = -\infty$ è misurabile MA $f+g$ NON HA SENSO.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ $f$ è mis. $\Rightarrow \lambda f$ è mis. IN QUESTO CASO USO LA CONVENZIONE $0 \cdot \pm\infty = 0$. DUNQUE se $\lambda = 0$ $\lambda f = 0$ anche se $f(x)$ vale $\pm\infty$ in qualche pto.

$\rightsquigarrow \lambda f + \mu g$ è mis, se ha senso.

- INOLTRE SE $f, g$ integrabili, allora:

$E_1 = \{x : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$

$E_2 = \{x : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\}$

SONO TRASCURABILI (HANNO MISURA NULLA)

(qui non c'è il problema $+\infty - \infty$, tranne che "per pochi punti")

ALLORA $f(x) + g(x)$ è ben definito fuori da $E_1 \cup E_2$ ($x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$ se $x \in \mathbb{R}$). Se definisco a piacere $f+g$ in $E_1 \cup E_2$ allora $f+g$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^N} f + \int_{\mathbb{R}^N} g$$

(il risultato non dipende da come ho definito $f+g$ in $E_1 \cup E_2$)

Poi se $f$ è integrabile, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ è integrabile

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f$$

IN REALTÀ Se $f$ è integrabile $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^N : |f| = +\infty\}$ è trascurabile. (da questo segue che $E_1$ e $E_2$ del pto precedente sono trascurabili $E_1 \cup E_2 \subset \{|f| = +\infty\} \cap \{|g| = +\infty\}$)

- Prodotto di misurabili è misurabile

Prodotto di integrabili NON È DETTO !!!

**Def.** DIRÒ che una proprietà $P(x)$ è valida quasi ovunque

OPPURE che vale per quasi ogni $x$ se

$$\{x \in \mathbb{R}^N : P(x) \text{ è falso}\} \text{ è trascurabile} \quad \text{CIOÈ}$$

$$m(\{x : P(x) \text{ è falso}\}) = 0$$

Per esempio $f(x) \geq 0$ quasi ovunque vuol dire che

$$m(\{x : f(x) < 0\}) = 0$$

- Se $f = 0$ q.o. ← quasi ovunque ($f(x) = 0$ per q.o. $x$)

  $\Rightarrow$ $f$ è (misurabile e) integrabile e $\int_{\mathbb{R}^N} f = 0$

- Se $f$ è misurabile / integrabile e se $g = f$ q.o. ($f(x) = g(x)$ per q.o. $x$) allora

  anche $g$ è misurabile / è integrabile e $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} g$

- $f$ è integrabile $\Leftrightarrow$ $|f|$ è integrabile

  (perché entrambe equivalgono a $f^+, f^-$ integrabili)

  ATTENZIONE - C'È UNA DIFFERENZA CON L'INT. IMPROPRIO DI $\mathbb{R}$

- Se $0 \leq f \leq g$ $f, g$ misurabili. ALLORA

  $g$ integrabile $\Rightarrow$ $f$ integrabile

  (ovvio perché $G^-(f) \subset G^-(g)$ e $m_{N+1}\, G^-(g) < +\infty$

  $\Rightarrow$ $m_{N+1}(G^-(f)) < +\infty$.