Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 04/12/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

CALCOLO INTEGRALE / TEORIA DELLA MISURA IN $\mathbb{R}^N$

(1) MISURA SECONDO RIEMANN / PEANO

Si parte dalla misura dei rettangoli:

- N-RETTANGOLO R è il prodotto cartesiano di N intervalli.

$\mathbb{R} \supset R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ dove $I_1, \dots I_N \subset \mathbb{R}$, INTERVALLI

- $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se è del tipo

$\{a < x < b\}$ $\{a \le x < b\}$ $\{a < x \le b\}$ $\{a \le x \le b\}$

con $-\infty \le a \le b \le +\infty$

(I è un intervallo $\Leftrightarrow$ $x, y \in I$, $x \le z \le y \Rightarrow z \in I$)

- CHIAMO lunghezza dell'intervallo I il numero "reale esteso"

$|I| = \sup I - \inf I$ ($b - a$ se a = estremo sx, b = estremo dx)

$0 \le |I| \le +\infty$ (se I è illimitato $|I| = +\infty$)

- Se R è un N-rettangolo $R = I_1 \times \dots \times I_N$, chiamo misura di R il numero

$$|R| = |I_1| \cdot |I_2| \cdot \dots \cdot |I_N|$$

CONVENZIONE

ATTENZIONE Nella def. di $|R|$ CONVENIAMO CHE

- Se uno degli intervalli $I_1 \dots I_N$ ha lunghezza 0 $\Rightarrow |R| = 0$ (anche se uno degli altri ha lunghezza infinita)
- Se tutti gli $I_1 \dots I_N$ hanno lunghezza $> 0 \Rightarrow |R| > 0$ e può essere che $|R| = +\infty$ se uno degli $I_1 \dots I_N$ ha lunghezza $+\infty$

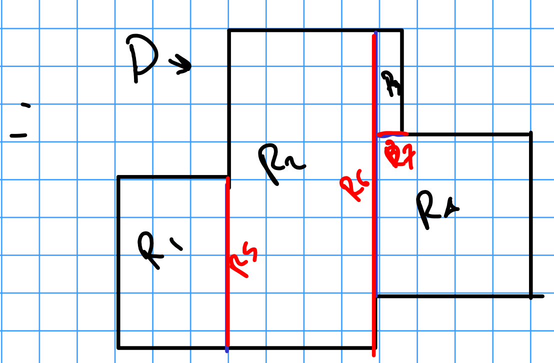
NEL SEGUITO — LIMITATAMENTE ALLA TEORIA DELLA MISURA — CONVENIAMO CHE $\boxed{0 \cdot \pm\infty = 0}$

- PLURIRETTANGOLI Chiamo N-PLURIRETTANGOLO UN INSIEME P OTTENUTO COME UNIONE FINITA DI RETTANGOLI

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i \qquad R_1 \dots R_k \text{ N-RETTANGOLI}$$

FATTO Se P è un N-PLURIRETTANGOLO $\Rightarrow$ esistono $R_1 \dots R_h$ N-RETTANGOLI DISGIUNTI tali che

$$P = \bigcup_{i=1}^{h} R_i$$



QUI SCOMPONGO P in rettangoli che si sovrappongono solo sui lati NON SONO VERAMENTE DISGIUNTI — PERÒ POSSO CONSIDERARE $\mathring{R}_1 \dots \mathring{R}_4$ e poi aggiungere i lati mancanti, che

DEF. Chiamo misura di un plurirettangolo P il numero (in $[0,+\infty]$)
$$|P| = \sum_{i=1}^{h} |R_i|$$ dove $R_1 \dots R_k$ sono N-rettangoli disgiunti e $P = \bigcup_{i=1}^{h} R_i$

Perché questa def. sia sensata mi serve un altro fatto:

FATTO Se $R_1 \dots R_h$, $R'_1 \dots R'_k$ sono due famiglie finite di rettangoli disgiunti e se
$$\bigcup_{i=1}^{h} R_i = \bigcup_{j=1}^{k} R'_j \qquad \text{ALLORA} \quad \sum_{i=1}^{h} |R_i| = \sum_{j=1}^{k} |R'_j|$$

NON DO DIMOSTRAZIONI (che peraltro sarebbero lunghe)

A QUESTO PUNTO VORREI MISURARE UN INSIEME A GENERICO IN $\mathbb{R}^N$

COSTRUZIONE DI RIEMANN/PEANO

- CONSIDERO $A \subset \mathbb{R}^N$ A limitato
- Considero le famiglie

$$\mathcal{S}^+ = \{P'' \text{ N-plurirettangolo} : A \subset P''\}$$
$$\mathcal{S}^- = \{P' \text{ N-plurirettangolo} : P' \subset A\}$$ ← qui ci sono solo plurirettangoli limitati

e consideriamo

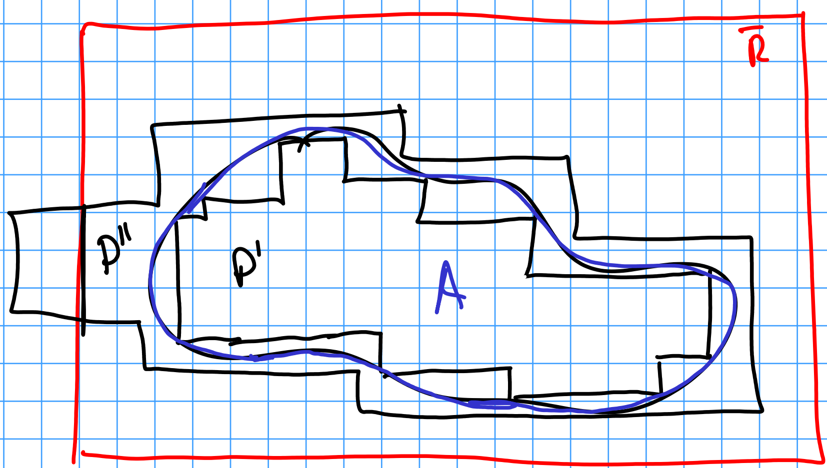
$$m^*(A) = \inf \{ |P| : P \in \mathcal{S}^+ \}$$ ← MISURA ESTERNA SECONDO R. DI A

$$m_*(A) = \sup \{ |P| : P \in \mathcal{S}^- \}$$ ← MISURA INTERNA SECONDO R DI A

OSS. $m^*(A) < +\infty$, perché esiste un rettangolo $\overline{R}$ t.c. $A \subset \overline{R}$ (visto che A è limitato). ALLORA

$m^*(A) = \inf\{ |\bar{R} \cap P''| \ : \ P'' \in \mathcal{S}^+ \}$

(se $P'' \in \mathcal{S}^+$, anche $P'' \cap \bar{R} \in \mathcal{S}^+$ e $|P'' \cap \bar{R}| \le |P''|$ — quindi se faccio l'inf, mi conviene prendere $P'' \cap \bar{R}$)



Si dimostra che $m_*(A) \le m^*(A)$

Intuitivamente $m_*(A)$ mi dà un'approssimazione dall'interno e $m^*(A)$ mi dà un'approssimazione dall'esterno del "volume" di A

<u>DIRÒ</u> che <u>A è misurabile secondo Riemann</u>/Peano se

$m^*(A) = m_*(A)$

e in tal caso indico $m_R(A) = m^*(A) = m_*(A)$

e chiamo $m_R(A)$ la "misura di A" (secondo R. ...)

#

<u>FATTO</u> ESISTONO INSIEMI NON MISURABILI SECONDO R.

IN $\mathbb{R}$ posso prendere

$$A = \{ x \in [0,1] \ , \ x \text{ è razionale} \}$$

Se guardo $\mathcal{S}^+$ vedo che ogni P di S^+ contiene $[0,1]$

(si dimostra usando il fatto che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$: dato $x \in \mathbb{R}$ trovo $q \in \mathbb{Q}$ vicino quanto voglio a x)

$\Rightarrow \quad |P| \ge |[0,1]| = 1$

[AVREI DOVUTO DIRE PRIMA CHE $P' \subset P'' \Rightarrow |P'| \leq |P''|$
se P', P'' N-PLURIRETTANGOLI (SI DIMOSTRA)]

Se guardo $\mathcal{P}^-$ vedo che gli unici $P \in \mathcal{P}^-$ sono dei punti (se P è più grosso di un punto $\Rightarrow \exists x$ irrazionale con $x \in P \Rightarrow$ P non può essere contenuto in A

$\Rightarrow$ se $P' \in \mathcal{P}^- \Rightarrow |P'| = 0$

Ne segue $m_*(A) = 0$ $m^*(A) \geq 1$

A non è misurabile

POSSO MISURARE MOLTI INSIEMI MA NON TUTTI!

PURTROPPO LA COSTRUZIONE SECONDO RIEMANN HA DEI DIFETTI - IN PARTICOLARE "NON VA D'ACCORDO" CON LA NOZIONE DI LIMITE

NON È VERO, PER ESEMPIO, CHE

se per ogni $n \in \mathbb{N}$ ho un insieme A_n e se so che $\forall n$ A_n è misurabile, $A_n \subset A_{n+1}$

Posso prendere $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ UNIONE numerabile CRESCENTE DI INSIEMI MISURABILI

NON È DETTO CHE A SIA MISURABILE

Per esempio, so che i numeri razionali "sono numerabili" dunque posso trovare una successione $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$q_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n$ $0 \leq q_n \leq 1$,

per ogni $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ esiste n t.c. $q = q_n$

Se chiamo $A_n = \{q_1 \dots q_n\}$ è un insieme che contiene un numero finito di punti. Si vede facilmente che A_n è misurabile (e $|A_n| = 0$). Però $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ NON È MISURABILE

IL PROBLEMA STA NEL FATTO CHE ABBIAMO APPROSSIMATO A, da dentro e da fuori, con UNIONI $\boxed{\text{FINITE}}$ DI RETTANGOLI

Potrei rifare la costruzione partendo da PLURIRETTANGOLI NUMERABILI

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \qquad R_n \text{ rettangoli}$$

Ponendo

$$|P| = \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \qquad \text{se gli } R_n \text{ sono disgiunti}$$

L'IDEA È QUESTA MA FACCIAMO IN MODO UN PO' DIVERSO

<u>Def.</u> Se $A \subset \mathbb{R}^N$ chiamo "misura esterna" di A – SECONDO Lebesgue – il numero in $[0,+\infty]$ dato da

$$\boxed{m^*_{\mathcal{L}}(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \ : \ R_n \text{ N-rettangoli},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}}$$

*POI NON SCRIVO $\mathcal{L}$

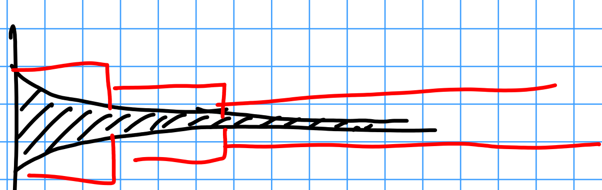
$$\left(\inf \{ |P| \ \ P \text{ plurirett numerabile } A \subset P \right)$$

LA DIFFERENZA RISPETTO A RIEMANN STA NEL FATTO CHE PRENDO successioni di Rettangoli invece di unioni finite di rettangoli

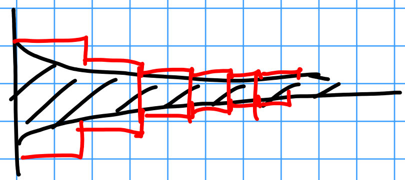
<u>N.B.</u> Non ho chiesto A limitato.

Se A è illimitato ogni famiglia finita di rettangoli che contiene A ha misura infinita

NUMERO FINITO DI RETT.



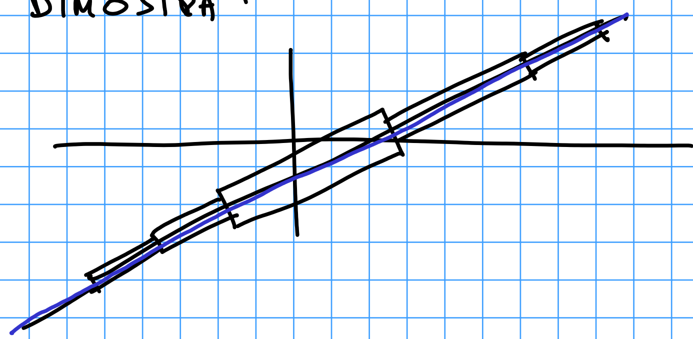
← MISURA INFINITA



SERIE DI RETTANGOLI PUÒ AVERE MISURA FINITA

PUÒ ESSERE $m^*(A) < +\infty$ anche se A è ILLIMITATO

PER ESEMPIO UNA RETTA IN $\mathbb{R}^2$ ha misura esterna 0 (SI DIMOSTRA)



DEF. DICO CHE $A \subset \mathbb{R}^N$ È MISURABILE se

$$\forall E \subset \mathbb{R}^N \qquad m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

" A spezza bene gli insiemi "

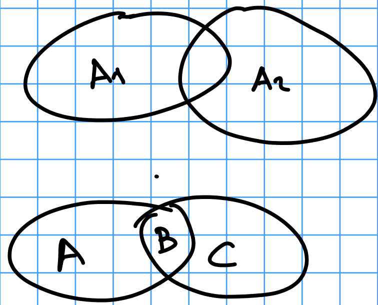
- Indico con $\mathcal{M} = \{ A \subset \mathbb{R}^N : A \text{ è misurabile} \}$
- Se $A \in \mathcal{M}$ scrivo $m(A)$ invece di $m^*(A)$ e chiamo $m(A)$ la misura di A

VEDREMO ORA che in $\mathcal{M}$ valgono molte proprietà buone.

- MONOTONIA Se $A_1 \subset A_2 \Rightarrow m^*(A_1) \le m^*(A_2)$ (dunque se $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ $\quad m(A_1) \le m(A_2)$)
- ADDITIVITÀ Se $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_2 \setminus A$ sono in $\mathcal{M}$. Inoltre

$$m(A_1 \cup A_2) + m(A_1 \cap A_2) = m(A_1) + m(A_2)$$

(



$m(A_1) = m(A) + m(B)$

$m(A_2) = m(B) + m(C)$

. . . .)

IN PARTICOLARE SE $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

- SUBADDITIVITÀ MISURABILE

Dati $A_n \subset \mathbb{R}^N$ e posto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ si ha

$$m^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

(è una prop. della misura esterna)

· ADDITIVITÀ NUMERABILE

Se $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$, se $A_n \cap A_m = \emptyset$, allora $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è misurabile e $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

(questo non è vero per la misura secondo Riemann)

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è misurabile e $m(\mathbb{Q}) = 0$ $\left(\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} \right)$

· Se R è un rettangolo $\Rightarrow R \in \mathcal{M}$ e $m(R) = |R|$

(È semplice vedere che $m^*(R) = |R|$ – POI CI SAREBBE DA PAR VEDERE CHE $m^*(E) = m^*(E \cap R) + m^*(E \setminus R)$ $\forall E$ . . .)

(· Se P è un plurirettangolo numerabile $\Rightarrow P \in \mathcal{M}$ e $m(P) = |P|$)

- ALCUNI TEOREMI "DI LIMITE":

(1) Se A_n sono misurabili, $A_n \subset A_{n+1}$ $\Rightarrow$

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ è misurabile e } m(A) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{m(A_n)}_{\text{crescente in } n}$$

(2) Se A_n sono misurabili, $A_n \supset A_{n+1}$ $\Rightarrow$

$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ è misurabile. Se inoltre $m(A_1) < +\infty$ $\Rightarrow$

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{m(A_n)}_{\text{decrescente in } n}$$

- Se A (limitato) è misurabile secondo Riemann $\Rightarrow$ A è misurabile e le due misure coincidono

<u>Def</u> Dico che A è "TRASCURABILE" se $m^*(A) = 0$
(per esempio $\mathbb{Q}$ è trascurabile)

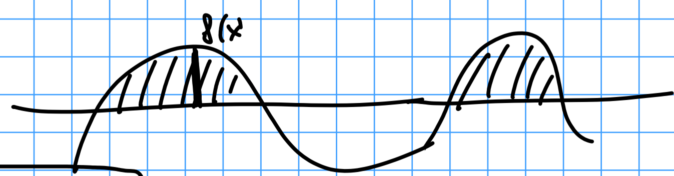
Allora

- Se A è trascurabile $\Rightarrow$ A è misurabile (e $m(A) = 0$)
- Se A è trascurabile e se $B \subset A$ $\Rightarrow$ B è trascurabile.

Supponiamo ora che $f: \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ TUTTO $\mathbb{R}^N$!!

(IN QUESTO CONTESTO) <u>Chiamo sottografico</u> di f l'insieme

$$G^-(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 \le y \le f(x)\}$$



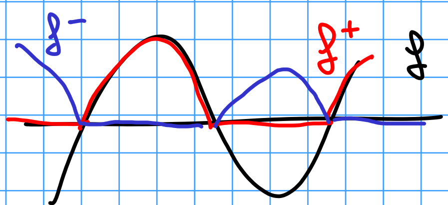
- Se $\boxed{f \geq 0}$ $(f: \mathbb{R}^N \to [0, +\infty])$ dico che f è misurabile quando $G^-(f)$ è misurabile

IN QUESTO CASO (<u>$f \geq 0$ misurabile</u>) chiamo integrale di f il numero (in $[0, +\infty]$)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := m\left(G^-(f)\right)$$ (può essere $+\infty$ ma è ≥ 0)

- Se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ dico che è <u>misurabile</u> se f^+ e f^- sono misurabili

$\left(f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = (-f(x))^+ \right)$



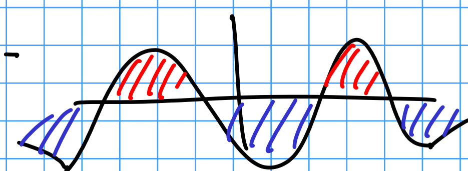
$$\boxed{f^+, f^- \geq 0, \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-}$$

Dico che f è integrabile, se f è misurabile e se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+ < +\infty \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f^- < +\infty$$

IN QUESTO CASO chiamo integrale di f il numero REALE

$$]-\infty, +\infty[\ \ni \int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+ - \int_{\mathbb{R}^N} f^-$$



CON QUESTE DEF. UNA FUNZIONE POSITIVA MISURABILE HA SEMPRE INTEGRALE, MA NON È DETTO CHE SIA INTEGRABILE